Mpi - Programme de colles 5

Semaine du 3 au 7 novembre 2025

1 Révisions sur les intégrales généralisées

2 Séries numériques ou vectorielles

a) Vocabulaire et généralités : série, somme partielle, série convergente, somme de la série, reste partiel. Opérations sur les séries convergentes. Exemples fondamentaux : séries géométriques et séries de Riemann.
b) Condition nécessaire de convergence, divergence grossière. Lien entre convergence d'une suite et de sa série téléscopique associée.
c) Séries à termes positifs : comparaison entre séries, régle de d'Alembert, sommation des relations de comparaison, théorème de Césaro,
d) Séries absolument convergentes dans un espace de dimension finie. Extension des résultats sur les sommations des relations de comparaison en $O(\ )$ ou $o(\ )$. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes dans une algèbre de dimension finie.
e) Séries alternées.

3 Familles sommables : révision de Première Année

On considère des familles de vecteurs dans un e.v.n. de dimension finie. Tous les résultats sont admis.

a) Familles de réels positifs : définition de la somme d'une telle famille comme élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, la famille est dite sommable quand sa somme est réelle. Propriétés calculatoires. Théorème de sommation par paquets. Théorème de Fubini sur les familles indexées par un produit cartésien. Dans le cas de familles indexées par $\mathbb{N}$, lien avec les séries à termes positifs, invariance de la somme par modification de l'ordre des termes de la série ou par regroupement de termes.
b) Familles de réels de signes quelconques, de complexes ou de vecteurs : définition de la sommabilité, définition de la somme dans ce cas. Propriétés de linéarité et d'inégalité triangulaire. Théorème de sommation par paquets. Théorème de Fubini sur les familles indexées par un produit cartésien. Dans le cas de familles sommables indexées par $\mathbb{N}$, lien avec les séries absolument convergentes, invariance de la somme par modification de l'ordre des termes de la série ou par regroupement de termes.
c) Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Questions de cours :

a) critère spécial des séries alternées
b) comparaison série-intégrale
c) une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs est sommable si et s. si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente