Mpi - Programme de colles 4

Semaine du 6 au 10 octobre 2025

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ (en fait n'importe quel corps).

1 Algèbre linéaire : révisions de Première Année

a) Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Familles libres, liées, génératrices. Bases.

b) Sommes de deux sous-espaces, sommes directes, sous-espaces supplémentaires.

c) Dimension d'un e.v., dimension d'un s.e.v., rang d'une famille de vecteurs. Th. de la base incomplète, caractérisation des bases.

d) Applications linéaires, noyau, image. Opérations sur les applications linéaires, algèbre $\mathscr{L}(E)$.

e) Applications linéaires en dimension finie, matrice dans un couple de bases, cas des endomorphismes. Th. du rang et applications. Caractérisation des automorphismes en dimension finie.

f) Opérations sur les matrices, algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Rang d'une matrice, matrices équivalentes. Matrices semblables. Trace. Caractérisation des matrices inversibles, calcul de l'inverse par l'algorithme de Gauss-Jordan.

g) Formes linéaires. En dimension finie, systèmes d'équations d'un s.e.v.

h) Déterminants.

2 Compléments

a) Sommes de plusieurs s.e.v., sommes directes, sous-espaces supplémentaires.

b) Polynômes annulateurs d'une matrice ou d'un endomorphisme en dimension finie, idéal annulateur, polynôme minimal. Applications : calcul de l'inverse, calcul des puissances.

c) Calculs par blocs, diverses définitions et propriétés.

3 Séries numériques ou vectorielles

a) Vocabulaire et généralités : série, somme partielle, série convergente, somme de la série, reste partiel. Opérations sur les séries convergentes. Exemples fondamentaux : séries géométriques et séries de Riemann.

b) Condition nécessaire de convergence, divergence grossière. Lien entre convergence d'une suite et de sa série téléscopique associée.

c) Séries à termes positifs : comparaison entre séries, régle de d'Alembert, sommation des relations de comparaison, théorème de Césaro,

d) Séries absolument convergentes dans un espace de dimension finie. Extension des résultats sur les sommations des relations de comparaison en $O(\ )$ ou $o(\ )$. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes dans une algèbre de dimension finie.

e) Séries alternées.

Questions de cours :

a) règle de d'Alembert

b) toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède un polynôme annulateur

c) une matrice A est inversible si et s.si elle possède un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$