Problème inspiré par le sujet Mines-Ponts 2 - MP - 2017

Problème 1

Dans ce problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme $\| \ \|$.

Si $a \in E$ et r est un réel strictement positif, on note $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r :
$$B(a,r) = \{x \in E \ / \ \|x-a\| < r\}.$$

Les deux premières parties sont indépendantes. La troisième utilise les résultats des parties I et II. La partie IV utilise les résultats de la partie III.

I. Stabilité des parties convexes par barycentration positive

On rappelle qu'une partie A de E est dite convexe quand elle vérifie

$$\forall (a,b) \in A^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad ta + (1-t)b \in A$$

Q 1.

a) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

Montrez que si $s = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} t_i \neq 0$ et $b = \dfrac{1}{s}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} t_i a_i$, alors il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i a_i = \lambda b + (1-\lambda)a_n$.

b) Soit A une partie convexe de E. Montrez la proposition suivante :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ et pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i a_i \in A$.

Remarque : tout vecteur qui peut s'écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$ où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ s'appelle le barycentre de la famille $(a_i, t_i)_{\leqslant i \leqslant n}$. On a donc montré que toute partie convexe est stable par barycentration positive (ici les coefficients t_i sont tous positifs).

II. Compacité

Dans cette partie, K est un compact de E.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On dit que cette famille est un recouvrement de K quand $K \subset \displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$.

L'objet de cette partie est de montrer la proposition suivante (dite propriété de Borel-Lebesgue) :

si $(\Omega_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts et un recouvrement de K, alors il existe une partie finie J de I telle que $(\Omega_i)_{i \in J}$ est aussi un recouvrement de K.

Q 2. Montrez l'existence de $\delta(K) = \displaystyle\sup_{(x,y) \in K^2} \|x-y\|$ (diamètre de K).

Q 3. Soit $\varepsilon > 0$ et (u_n) une suite de E telle que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, si $n \neq p$, alors $\|u_n - u_p\| > \varepsilon$. Montrez que (u_n) n'a aucune valeur d'adhérence.

Q 4. Montrez que pour tout $r > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ tel que $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$. Indication : procéder par l'absurde et construire une suite qui permette d'utiliser la question précédente.

Q 5. Soit (u_n) une suite de E qui converge vers ℓ et $r > 0$. Montrez qu'il existe $\alpha > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $B(u_n, \alpha) \subset B(\ell, r)$.

Q 6. Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts qui est un recouvrement de K. Montrez la proposition suivante :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in K \quad \exists i \in I \quad B(x,\alpha) \subset \Omega_i$$

(on pourra procéder par l'absurde et construire une suite de K qui ne possède aucune valeur d'adhérence)

Q 7. Concluez : montrez la propriété de Borel-Lebesgue.

Q 8. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de K telle que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \varnothing$. Montrez qu'il existe une partie finie J de I telle que $\bigcap\limits_{i\in J} F_i = \varnothing$.

III. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Dans cette partie, la norme de E est la norme euclidienne associée à un produit scalaire $(\ |\ )$, G est un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K une partie non vide, compacte et convexe de E.

Pour $x \in E$, on pose $N_G(x) = \sup\limits_{u\in G} \|u(x)\|$.

Q 9. Montrez que N_G est bien définie et qu'elle est une norme sur E. Montrez que pour $x \in E$, l'application $u \mapsto u(x)$ est continue sur G.

Q 10. Montrez que N_G vérifie en outre les deux propriétés suivantes :
— pour tout $x \in E$ et $u \in G$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
— pour tout $(x, y) \in E^2$ et $x \neq 0$, $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $y = \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+$;

on rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(x|y) \leqslant \|x\|\,\|y\|$ avec égalité si et seulement si $y = \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Q 11. Dans cette question, on suppose que u est un élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que $u(K) \subset K$.

Pour $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$.

Montrez que la suite (x_n) est à termes dans K, puis qu'elle a une valeur d'adhérence $a \in K$. Montrez aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \dfrac{\delta(K)}{n}$. Déduisez-en que a est un point fixe de u (*i.e.* $u(a) = a$).

Dans les question suivantes, on suppose que K est stable par tous les éléments de G. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \ldots, u_r$ r éléments de G et on pose $u = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i$.

Q 12. Montrez que K est stable par u et déduisez-en l'existence d'un élément a de K tel que $u(a) = a$.

Q 13. Montrez que $N_G(u(a)) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$.

Déduisez-en que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, $N_G\left(u_j(a) + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) = N_G\left(u_j(a)\right) + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} N_G\left(u_i(a)\right)$.

Q 14. Déduisez-en, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, l'existence d'un réel $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

Q 15. Déduisez-en que a est un point fixe de tous les endomorphismes $u_1, \ldots, u_r$.

Q 16. En utilisant la question 8, montrez qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

IV.

Si $N = \dim E$ et F est une partie de E, on note $Conv(F)$ l'intersection de toutes les parties convexes qui contiennent F : c'est le plus petit convexe de E qui contient F, appelé enveloppe convexe de F. On admet :

$$Conv(F) = \left\{ \sum_{i=1}^{N+1} t_i a_i \ / \ (a_1, \ldots, a_{N+1}) \in E^{N+1}, (t_1, \ldots, t_{N+1}) \in [0,1]^{N+1}, \sum_{i=1}^{N+1} t_i = 1 \right\}$$

Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle que $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^\top A = I_n$ et que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $S_n^{++} = \{A^\top A \ / \ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\}$. On admet que S_n^{++} est une partie convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

—-

Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Si $A \in G$, on définit l'application ρ_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui même par la formule $\rho_A(M) = A^{\mathsf{T}} M A$. On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, l'application qui à $A \in G$ associe $\rho_A(M)$ est continue.

On note $H = \{\rho_A \ / \ A \in G\}$, $\Delta = \{A^{\mathsf{T}} A \ / \ A \in G\}$ et $K = Conv(\Delta)$.

Q 17. Montrer que $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $GL(M_n(\mathbb{R}))$.

Q 18. Montrer que Δ est un compact contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que K est un sous-ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H.

Q 19. Montrer qu'il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G$, $\rho_A(M) = M$. En déduire l'existence de $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $G = N^{-1} G_1 N = \{N^{-1} B N \ / \ B \in G_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$, et $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $NKN^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. On désigne par g l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par P un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et par σ_P la symétrie orthogonale par rapport à P.

Q 20. Montrer que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie, puis que c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$. Montrer que g conserve l'orthogonalité et en déduire K.

Problème 1

Ce corrigé est inspiré par celui d'Edouard Lucas (MPI - lycée Montaigne), merci à lui.

I.

Q 1.

a) Il suffit de poser $\lambda = 1 - t_n$.

b) Par recurrence sur n. On appelle $\mathscr{P}(n)$ le prédicat :

« pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n$, si $\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i = 1$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i a_i \in A$ ».

Pour $n = 1$, $\mathscr{P}(1)$ est trivialement vraie. Pour $n = 2$, il s'agit simplement de la défintion de partie convexe.

Si $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie, alors soit $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $(t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i = 1$,

premier cas : si $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} t_i \neq 0$, alors on pose $b = \dfrac{1}{s}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} t_i a_i$; comme la somme des $(n-1)$ coefficients de cette somme vaut 1 et qu'ils sont tous positifs, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $b \in A$; or d'après la question précédente on peut écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i a_i = \lambda b + (1-\lambda) a_n$ où $\lambda \in [0,1]$, donc comme b et a_n sont dans A et que A est convexe, on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i a_i \in A$;

deuxième cas : si $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} t_i = 0$, alors comme il s'agit d'une somme de réels positifs, tous ces réels sont nuls donc il reste $\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i a_i = t_n a_n = a_n \in A$.

Dans les deux cas, on a ce qu'on veut, donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

II.

Q 2. K est un compact donc une partie bornée. Donc il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$, donc pour tout $(x,y) \in K^2$, $\|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2R$. La fonction $(x,y) \mapsto \|x - y\|$ est donc majorée sur K^2, donc $\delta(K)$ existe (propriété de la borne supérieure).

Q 3. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente. Ainsi la suite $\left(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers 0, ceci nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N$, on ait $\|x_{\varphi(p+1)} - x_{\varphi(p)}\| \geqslant \varepsilon$. Contradiction.
Ainsi $\boxed{\text{cette suite n'admet aucune suite extraite convergente}}$

Q 4. Par l'absurde, on suppose que la propriété à démontrer est fausse.

Ceci nous fournit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de E on ait $K \not\subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$.

On va construire par récurrence une suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ à valeurs dans K telle que pour tout $n \neq p$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.
On choisit un élément $x_0 \in K$. Par hypothèse, on a $K \not\subset B(x_0, \varepsilon)$, ce qui nous fournit $x_1 \in K \setminus B(x_0, \varepsilon)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose construits $x_0, \dots, x_k \in K$ tel que pour tout $(n,p) \in [\![1,k]\!]^2$ tel que $n \neq p$, on a $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.
On a alors $K \not\subset \displaystyle\bigcup_{i=0}^p B(x_i, \varepsilon)$, donc il existe $x_{k+1} \in K$ tel que $x_{k+1} \notin \displaystyle\bigcup_{i=0}^p B(x_i, \varepsilon)$, donc pour tout $n \in [\![1,k]\!]$, $\|x_{k+1} - x_n\| \geqslant \varepsilon$.
Par récurrence, on a donc construit la suite voulue, qui vérifie pour tout $(n,p) \in [\![1,k+1]\!]^2$ tel que $n \neq p$, $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.
La suite ainsi construite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ vérifie pour tout entiers naturels $n \neq p$, on a $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$. D'après la question précédente, cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence. Or il s'agit d'une suite à valeurs dans le compact K, ce qui est absurde.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout réel } \varepsilon > 0, \text{ il existe un entier } p > 0 \text{ et } x_1, \dots, x_p \text{ éléments de } E \text{ tels que } K \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)}$

Q 5. On pose $\alpha = \dfrac{r}{2} > 0$. La suite (u_n) converge vers ℓ, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha$.
Donc pour tout $n \geqslant N$ et $x \in B(u_n, \alpha)$, $\|x - \ell\| \leqslant \|x - u_n\| + \|u_n - \ell\| < \alpha + \alpha = r$, donc $B(u_n, \alpha) \subset B(\ell, r)$.

Q 6. Par l'absurde, on suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $x \in K$, tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x, \alpha) \not\subset \Omega_i$.
On spécialise $\alpha \leftarrow 1/n$.
Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, ceci nous fournit $x_n \in K$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x_n, 1/n) \not\subset \Omega_i$.
La suite (x_n) à valeurs dans le compact K admet une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une valeur d'adhérence $\ell \in K$. Comme $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$, ceci nous fournit $j \in I$ tel que $\ell \in \Omega_j$.
Comme Ω_j est un ouvert, ceci nous fournit $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset \Omega_j$.
Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ, d'après la question précédente, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $\beta > 0$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $B(x_{\varphi(n)}, \beta) \subset \Omega_j$.
Or $\varphi(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $\dfrac{1}{\varphi(n)} < \beta$.
Donc pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, $B(x_{\varphi(n)}, 1/\varphi(n)) \subset B(x_{\varphi(n)}, \beta) \subset B(\ell, r)$, ce qui absurde par construction de la suite (x_n).
Ainsi $\boxed{\text{il existe un réel } \alpha > 0 \text{ tel que pour tout } x \in K, \text{ il existe } i \in I \text{ tel que } B(x, \alpha) \subset \Omega_i}$.

Q 7. K étant compact, la question précédente donne l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i_x \in I$ tel que $x \in B(x, \alpha) \subset \Omega_{i_x}$.
D'après la question 4, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(x_k, \alpha)$ donc $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Omega_{i_{x_k}}$.

D'où $\boxed{\text{l'existence d'une sous-famille finie } (\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_p}) \text{ de la famille } (\Omega_i)_{i \in I} \text{ telle que } K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}}$.

Q 8. On note pour $i \in I$, $O_i = E \setminus F_i$ qui est un ouvert de E par complémentaire, et on a $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} O_i$.
La question précédente nous fournit une sous famille finie $(O_{i_1}, \ldots, O_{i_p})$ telle que $K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{p} O_{i_k}$. On a donc par passage au complémentaire $\bigcap\limits_{k=1}^{p} F_{i_k} \subset E \setminus K$.

Comme pour tout $i \in I$, on a $F_i \subset K$, on a donc $\boxed{\bigcap\limits_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset}$.

III.

Q 9.

— L'application $u \in \mathscr{L}(E) \longmapsto u(x) \in E$ est linéaire et $\mathscr{L}(E)$ est de dimension finie $(\dim E)^2$, donc elle est continue.
Ainsi cette application est bornée sur le compact G d'après le th. des bornes atteintes,
d'où l'existence dans $\mathbb{R}^+$ de $N_G(x) = \sup\limits_{u \in G} \|u(x)\|$.

— Soit $(x, y) \in E^2$. Pour tout $u \in G$, $\|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\| \leqslant N_G(x) + N_G(y)$.
Comme c'est vrai pour tout $u \in G$, on a bien $N_G(x+y) \leqslant N_G(x) + N_G(y)$

— La multiplication par un réel positif est croissante donc elle conserve l'ordre des inégalités et donc en particulier les bornes supérieures,
donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N}_G(\lambda x) = \sup\limits_{u \in G} |u(\lambda x)| = \sup\limits_{u \in G} |\lambda u(x)| = \sup\limits_{u \in G} |\lambda|.|u(x)| = |\lambda| \sup\limits_{u \in G} |u(x)| = |\lambda| N_G(x)$

— Si $N_G(x) = 0$, alors $\forall u \in G$, $\|u(x)\| = 0$: en particulier pour $u = \mathrm{Id}_E$ car G sous groupe de $GL(E)$, donc $x = 0$

On a montré que $\boxed{N_G \text{ est bien définie et que c'est une norme sur } E}$.

Q 10.

— Soit $u \in G$ et $x \in E$.
L'application $v \longmapsto v \circ u$ est une bijection du groupe G dans lui-même de bijection réciproque $v \longmapsto v \circ u^{-1}$
donc $N_G(u(x)) = \sup\limits_{v \in G} \|v \circ u(x)\| = \sup\limits_{w \in G} \|w(x)\| = N_G(x)$.
Ainsi $\boxed{\text{pour tous } u \in G \text{ et } x \in E, N_G(u(x)) = N_G(x)}$

— Soit $x, y \in E$ tel que x est non nul.

$\Leftarrow$: On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lambda x = y$.

Pour tout $u \in G$, on a $\|u(x+y)\| = (1+\lambda) \cdot \|u(x)\|$ car $1+\lambda \geqslant 0$. En faisant comme pour l'homogénéité, on obtient : $N_G(x+y) = (1+\lambda)N_G(x)$ donc $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ car $\lambda \geqslant 0$ et N_G est une norme.

$\Rightarrow$: On suppose que $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$.

Le théorème des bornes atteintes avec l'application continue définie sur le compact $G : u \longmapsto \|u(x)\|$ nous fournit $v \in G$ tel que $N_G(x+y) = \|v(x+y)\|$

On note $x' = v(x)$ et $y' = v(y)$ de sorte que $N_G(x+y) = \|x'+y'\|$ et avec ce qui précède, on a $N_G(x) + N_G(y) = N_G(x') + N_G(y')$ donc $\|x'+y'\| = N_G(x') + N_G(y')$.

Ainsi $N_G(x') + N_G(y') \leqslant \|x'\| + \|y'\|$ en utilisant l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$

or $N_G(x') \geqslant \|x'\|$ et $N_G(y') \geqslant \|y'\|$ car $\mathrm{Id}_E \in G$ donc $\|x'+y'\| = N_G(x') + N_G(y') = \|x'\| + \|y'\|$.

En élevant au carré on trouve après simplification : $2(x' \mid y') = 2\|x'\| \times \|y'\|$ (*)

donc (x', y') lié d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

comme $x' \neq 0$ car $v \in GL(E)$, ceci nous fournit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda x' = y'$ (**)

En appliquant v^{-1} à (**), on a : $\lambda x = y$.

Conclusion :

$\boxed{\text{pour tous } x, y \in E \text{ avec } x \text{ non nul, } N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y) \text{ si et seulement si } \lambda x = y \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^+}$

Q 11. Soit $x \in K$. Comme K est stable par u, on montre par récurrence sur i que $u^i(x) \in K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ainsi d'après la partie I, comme K est convexe, on a $x_n \in K$.
Ainsi comme K est compact :

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est à valeurs dans } K \text{ et admet une suite extraite convergente vers un élément } a \text{ de } K}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\|u(x_n) - x_n\| = \dfrac{1}{n}\|u^n(x) - x\|$ donc $\boxed{\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \dfrac{\delta(K)}{n}}$ car x et $u^n(x) \in K$

Notons φ une extractrice telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \dfrac{\delta(K)}{\varphi(n)}$ et de plus $\dfrac{\delta(K)}{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme l'application $y \mapsto u(y) - y$ est continue (linéaire en dimension finie), alors $\left(u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $u(a) - a = 0$, ainsi $\boxed{\text{l'élément } a \text{ de } K \text{ est un point fixe de } u}$

Q 12. Soit $x \in K$. Alors pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $u_i(x) \in K$. Or $u(x) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(x)$ et K est convexe donc d'après la question 1b de la partie I, $u(x) \in K$. Comme $u \in \mathscr{L}(E)$ le résultat de la question précédente permet d'en déduire : $\boxed{\text{l'existence de } a \in K \text{ tel que } u(a) = a}$.

Q 13. Comme $u(a) = a$, on a $N_G\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = N_G\left(u(a)\right) = N_G(a)$

et d'après le premier point de la question 10, on a $N_G(u_i(a)) = N_G(a)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, d'où

$\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)) = \dfrac{r}{r}N_G(a)$. On a bien $\boxed{N_G\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))}$.

Ainsi par homogénéité : $N_G\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$ car $r \geqslant 0$

Soit $j \in \{1, \ldots, r\}$. Avec ce qui précède et en utilisant l'inégalité triangulaire pour N_G, on a :

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leqslant N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} N_G\left(u_i(a)\right) = N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right)$$

donc on a bien $\boxed{N_G\left(u_j(a) + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right)}$.

Q 14. Soit $j \in \{1, \ldots, r\}$. On suppose dans un premier temps que $u_j(a)$ est un vecteur non nul de E.
En appliquant le deuxième point de 10 à l'égalité précédente, on obtient l'existence de $\lambda_j \geqslant 0$ tel que

$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a) = \lambda_j u_j(a)$, donc $ru(x) = \lambda_j u_j(a) + u_j(a)$ ce qui permet de conclure dans ce cas car $r > 0$.

Dans un deuxième temps, si $u_j(a)$ est le vecteur nul de E alors $a = 0$ car $u_j \in GL(E)$, et en prenant $\lambda_j = 1$ on a $u(a) = 0$ et $\dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a) = 0$ car u et u_j linéaires,

$\boxed{\text{pour tout } j \in \{1, \ldots, r\}, \text{ on a l'existence d'un nombre réel } \lambda_j \geqslant 0 \text{ tel que } u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)}$ dans tous les cas.

Q 15. On suppose par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que a ne soit pas un point fixe de l'endomorphisme u_i.

On a : $a = u(a) = \dfrac{\lambda_i + 1}{r} u_i(a)$ donc $u_i(a) = \mu a$ où $\mu = \dfrac{r}{\lambda_i + 1} > 0$ car $r > 0$ et $\lambda_i \geqslant 0$. On a donc $\mu \neq 1$ et $a \neq 0$.

Premier cas : si $\mu > 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_i^k(a) = \mu^k a$

Comme K est stable par u_i alors la suite $(u_i^k(a))_k$ est à valeurs dans K (récurrence immédiate)

Comme K est bornée car compact, alors cette suite est bornée. Or $\|u_i^k(a)\| = \mu^k \cdot \|a\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Absurde.

Deuxième cas : si $\mu < 1$, alors on a $u_i^{-1}(a) = \dfrac{1}{\lambda} a$ où $\dfrac{1}{\lambda} > 1$ et K est stable par l'automorphisme u_i^{-1}

En faisant comme dans le cas précédent avec u_i^{-1}, on arrive à une absurdité de façon analogue.

Ainsi $\boxed{a \text{ est un point fixe de tous les endomorphismes } u_i \text{ où } i \in \{1, \ldots, r\}}$

Q 16. On note pour $u \in G$, $F_u = \{a \in K \ / \ u(a) = a\}$.

Comme pour $u \in G$, $u - \mathrm{Id}_E$ est continue (linéaire en dimension finie), alors $F_u = (u - \mathrm{Id}_E)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de K (image réciproque de fermé par une application continue)

Comme K est un fermé de E (car compact de E) et $F_u \subset K$, alors F_u est un fermé de E.

On suppose par l'absurde que $\bigcap_{u \in G} F_u = \emptyset$.

D'après la question 8, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_p \in G$ tels que $\bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i} = \emptyset$.

Ceci est contradictoire avec la question précédente ainsi $\bigcap_{u \in G} F_u \neq \emptyset$.

Donc on peut choisir $a \in \bigcap_{u \in G} F_u$. Ainsi $\boxed{\text{il existe bien } a \in K \text{ tel que pour tout } u \in G,\ u(a) = a}$

IV.

Q 17. Soit $A \in G$. Montrons : $\begin{cases} (a) & \rho_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (b) & \rho_A \text{ linéaire} \\ (c) & \rho_A \text{ bijective} \end{cases}$

Pour (a) C'est évident

Pour (b) On vérifie par calcul dans l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que :

$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \rho_A(\lambda M + N) = \lambda \rho_A(M) + \rho_A(N)$$

Pour (c) Soit $B, C \in G$.

Par calcul dans l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a vérifie facilement que $\rho_B \circ \rho_C = \rho_{CB}$ car $B^\top C^\top = (CB)^\top$

On a également $\rho_{I_n} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ et l'existence A^{-1} car $G \subset GL_n(\mathbb{R})$.

donc $\rho_A \circ \rho_{A^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\rho_{A^{-1}} \circ \rho_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$

Ce qui prouve que ρ_A est bijective

On a montré que $\boxed{\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))}$

Montrons maintenant que l'application notée $\Lambda : A \in G \longmapsto \rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$ est continue.

On se donne $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n^2}$ une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application ψ qui à $f = (f_1, \cdots, f_{n^2}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^{(n^2)}$ associe l'application $\psi(f) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n^2]\!],\ \psi(f)(e_i) = f_i$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel donc linéaire entre espaces de mêmes dimensions finies (n^4).

Ainsi l'application ψ est continue.

L'énoncé donne que à $M \in G$ fixé, l'application : $A \in G \longmapsto \rho_A(M) \in M_n(\mathbb{R})$ est continue.

Donc l'application noté $\varphi_{\mathscr{B}} : A \in G \longmapsto (\rho_A(e_1), \cdots, \rho_A(e_{n^2})) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^{(n^2)}$ est continue

Ainsi $\Lambda = \psi \circ \varphi_{\mathscr{B}}$ est continue par composition.

Comme $H = \Lambda(G)$, alors H est un compact en tant qu'image d'un compact par une application continue.

Pour établir que H est sous-groupe de $GL(M_n(\mathbb{R}))$, il suffit d'établir que : $\begin{cases} (i) & H \subset GL(M_n(\mathbb{R})) \ \textit{(déjà vu)} \\ (ii) & H \neq \emptyset \\ (iii) & \text{Les stabilités de } H \end{cases}$

Pour (ii) On a $I_n \in G$ car G sous-groupe.

Donc $\rho_{I_n} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in H$ ainsi H est non-vide

Pour (iii) Soit $\rho_A, \rho_B \in H$ où $A, B \in G$.

On a vu en (c) que $(\rho_A)^{-1} \circ \rho_B = \rho_{BA^{-1}}$

Comme G est un sous-groupe alors $BA^{-1} \in G$ et donc $(\rho_A)^{-1} \circ \rho_B \in H$.

On a bien montré que $\boxed{H \text{ est un sous-groupe compact de } GL(M_n(\mathbb{R}))}$

Remarque : *On aurait pu montrer que pour loi de composition interne $\perp$ définie sur G par : $A \perp B = BA$que $(G, \perp)$ est un groupe, que Λ est un morphisme de groupes de $(G, \perp)$ dans $(GL(M_n(\mathbb{R})), \circ)$ et que $H = \mathrm{Im}(\Lambda)$ et ainsi que H est un sous-groupe de $GL(M_n(\mathbb{R}))$*

Q 18. On a $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ donc en utilisant la réciproque de 2, on a $\Delta \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R})$.

L'application notée $\Phi : A \in G \longmapsto \rho_A(I_n) = A^\top A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est continue d'après l'énoncé

ainsi $\Delta = \Phi(G)$ est compact car G l'est.

d'où $\boxed{\Delta \text{ est un compact contenu dans } S_n^{++}(\mathbb{R})}$

Il suffit d'établir que : $\begin{cases} (i) & K = \mathrm{Conv}(\Delta) \text{ est compact (oui avec 4.)} \\ (ii) & H \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ (iii) & K \text{ stable par les éléments } H \end{cases}$

Pour (ii) **:** D'après 3, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui de plus contient Δ

Comme K est le plus petit convexe contenant Δ alors $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque : le plus petit convexe contenant une partie est bien défini car $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et que l'intersection d'une famille de convexes est convexe.

Pour (iii) **:** Soit $M \in K$ et $\rho_A \in H$ où $A \in G$. Montrons $\rho_A(M) \in K$.

D'après ce qui est admis en introduction, on peut écrire $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i B_i$

où $(B_1, \ldots, B_{n^2+1}) \in \Delta^{n^2+1}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^2+1}) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{n^2+1}$ et $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i = 1$

Par linéarité de ρ_A : $\rho_A(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i)$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n^2+1$, on peut écrire $B_i = (C_i)^\top C_i$ où $C_i \in G$, ainsi $\rho_A(B_i) = A^\top (C_i)^\top C_i A = (C_i A)^\top C_i A$

or $C_i A \in G$ car G est un groupe et donc $\rho_A(B_i) \in \Delta$

d'où $\rho_A(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i) \in \mathrm{Conv}(\Delta) = K$.

On a montré que $\boxed{K \text{ est un sous-ensemble compact de } S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ qui est stable par tous les éléments de } H}$

Q 19. Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Markov-Kakutani au convexe compact K de l'espace euclidien $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est stable par tous élément du sous groupe compact H de $GL(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, il suffit d'établir que K est non vide. C'est bien la cas car comme $I_n \in G$, on a $\{I_n^\top I_n\} \subset \Delta \subset K$.

Le théorème nous fournit alors $a \in K$, tel que $\forall u \in H,\ u(a) = a$

ou encore : $\boxed{\text{il existe } M \in K \text{ tel que pour tout } A \in G,\ \rho_A(M) = M}$

Comme $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$, 2 nous fournit $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = N^\top N$.

Soit $A \in G$. On a alors $A^\top N^\top NA = N^\top N$ car $\rho_A(M) = M$.

Alors on a $\left(NAN^{-1}\right)^\top NAN^{-1} = \left(N^{-1}\right)^\top A^\top N^\top NAN^{-1} = \left(N^\top\right)^{-1} N^\top NN^{-1} = I_n$

On en déduit $\boxed{\text{l'existence de } N \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que pour tout } A \in G,\ NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})}$

Considérons l'application $\psi_N : A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto NAN^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$

On vérifie que ψ_N est un morphisme de groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ vers lui-même.

On note $G_1 = \psi_N(G)$ qui est donc un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ car G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

Comme $\psi_N(G) \subset O_n(\mathbb{R})$ alors G_1 est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$. On remarque de plus que ψ_N est bijectif de bijection réciproque $\psi_{N^{-1}} : A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto N^{-1}AN \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $G = \psi_{N^{-1}}(G_1)$.

Finalement $\boxed{\text{il existe un sous-groupe } G_1 \text{ de } O_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } G = N^{-1}G_1N = \{N^{-1}BN/\ B \in G_1\}}$

Q 20. $\underline{g \circ \sigma_P \circ g^{-1} \text{ est une symétrie}}$ car $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et $g^2 = \mathrm{Id}_E$ car σ_P est une symétrie

On note A la matrice de σ_P dans la base canonique qui est orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle et donc $A \in O_n(\mathbb{R}) \subset K$ Ainsi $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ admet comme matrice dans cette base $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\underline{\text{c'est un endomorphisme orthogonal}}$ de $\mathbb{R}^n$ d'où $\underline{g \circ \sigma_P \circ g^{-1} \text{ est une symétrie orthogonale}}$. De plus $\forall x \in E$, $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \sigma_P\left(g^{-1}(x)\right) = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g^{-1}(x) \in P \Leftrightarrow x \in g(P)$. On en déduit que $\boxed{g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}}$.

Soit $x \perp y$ dans E. Si $x \neq 0$. Alors $y \in Q = \{x\}^\perp$, hyperplan de E et $g \circ \sigma_Q \circ g^{-1} = \sigma_{g(Q)}$

alors $\sigma_{g(Q)}(g(x)) = g \circ \sigma_Q(x) = -g(x)$ donc $g(x) \in g(Q)^\perp$ or $g(y) \in g(Q)$ donc $g(x) \perp g(y)$ (vrai pour $x = 0$)

Ainsi g conserve l'orthogonalité et 5 nous fournit $k > 0$ tel que $N = k\Omega$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ car $N \in GL_n(\mathbb{R})$

donc Ω est tel que $\Omega K \Omega^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. 21 nous fournit G_1 sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $K = \Omega^{-1}G_1\Omega \subset O_n(\mathbb{R})$

on en déduit $\boxed{K = O_n(\mathbb{R})}$