

## 1 Intégrales généralisées

Reprise du programme 1

## 2 Espaces vectoriels normés

Les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- a) Reprise du programme précédent : normes, parties bornées, suites, limites et continuité, continuité des applications linéaires, norme subordonnée.
- b) Intérieur d'une partie. Voisinages d'un point.
- c) Parties ouvertes ou fermées d'un e.v.n., diverses propriétés usuelles et caractérisations. Extension aux ouvertes ou fermés relatifs. Caractérisation des fonctions continues par les images réciproques d'ouverts ou de fermés.

**Questions de cours :**

- a) montrer que  $f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$  est une norme sur  $C^0([0,1], \mathbb{R})$
- b) montrer que  $f \mapsto \|f\| = \int_0^1 |f|$  est une norme sur  $C^0([0,1], \mathbb{R})$
- c) pour  $f$  linéaire de  $E$  dans  $F$ , montrer l'équivalence des propositions suivantes
  - $f$  est continue en 0
  - $f$  est continue sur  $E$
  - il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| \leq K\|x\|$
- d) si  $f : E \rightarrow F$  est continue, alors l'image réciproque d'un fermé par  $f$  est un fermé.
- e) si  $f : E \rightarrow F$  est continue, alors l'image réciproque d'un ouvert par  $f$  est un ouvert.