

## 1 Intégrales généralisées

Reprise du programme précédent

## 2 Espaces vectoriels normés

Les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{C}$ .

- a) Normes sur un e.v., espace vectoriel normé (e.v.n.). Exemples fondamentaux : la valeur absolue, le module, les normes euclidiennes associées à un produit scalaire (voir cours de Première Année), les normes usuelles sur un  $K$ -e.v. de dimension finie (norme 1, norme 2 et norme infinie), la norme infinie sur les espaces de suites, la norme infinie sur les espaces de fonctions. E.v.n. produits de deux e.v.n., de plusieurs e.v.n. (en nombre fini).

Normes équivalentes. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).

- b) Boules ouvertes, fermées, sphères dans un e.v.n. Parties convexes, les boules sont des parties convexes, les sphères ne le sont jamais. Parties bornées ; en dimension finie, indépendance vis-à-vis de la norme choisie.
- c) Suites convergentes dans un e.v.n. Propriétés usuelles : th. d'opérations, unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, suites extraites. En dimension finie, indépendance de la définition de suite convergente vis-à-vis de la norme choisie, caractérisation de la convergence d'une suite par la convergence de ses coordonnées dans une base.

Points adhérents à une partie : définition séquentielle, caractérisation équivalente par utilisation de boules, adhérence d'une partie. Parties denses.

- d) Limites de fonctions entre deux e.v.n. Propriétés usuelles : th. d'opérations, unicité de la limite, toute fonction ayant une limite est bornée au voisinage de  $\dots$ , caractérisation séquentielle de la limite, composition des limites. En dimensions finies, indépendance de la définition de fonction ayant une limite vis-à-vis des normes choisies. Extension aux cas des limites infinies, des limites en  $+\infty$  ou  $-\infty$ , des limites quand  $\|x\|$  tend vers l'infini.
- e) Fonctions continues, propriétés usuelles. Cas de la dimension finie. Fonctions lipschitziennes, exemple : la distance à une partie, caractérisation des points adhérents grâce à cette distance. Cas particuliers des applications linéaires, différentes caractérisations des applications linéaires continues. Cas particulier en dimension finie. Norme subordonnée (ou norme triple) d'une application linéaire continue. La norme subordonnée est une norme sous-multiplicative. Norme subordonnée d'une matrice carrée.

### Questions de cours :

- a) montrer que  $f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$  est une norme sur  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$
- b) montrer que  $f \mapsto \|f\| = \int_0^1 |f|$  est une norme sur  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$
- c) pour  $f$  linéaire de  $E$  dans  $F$ , montrer l'équivalence des propositions suivantes
- $f$  est continue en 0
  - $f$  est continue sur  $E$
  - il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| \leq K\|x\|$