

## ALGÈBRE LINÉAIRE : RÉVISIONS ET COMPLÉMENTS

\* Exercice proche du cours \*\* Exercice de difficulté normale \*\*\* Exercice difficile (voire très difficile)

+\*\*1) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $n$  un entier au moins égal à 2 et  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille libre de  $E$ .

a) Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $c_i = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} u_k$ . Montrez que la famille  $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$  est libre.

b) Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  : on pose  $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $v_i = s + u_i$ . Montrez que la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est liée si et seulement si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = -1$ .

c) Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  : on pose  $s = \sum_{i=1}^n u_i$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $v_i = s + \lambda u_i$ . Montrez qu'il existe exactement deux valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est liée.

+\*\*2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on pose  $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ . Montrez que la famille  $\mathcal{F}_n = (P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

+\*\*3) Soit  $f$  une application d'un ensemble  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  qui prend une infinité de valeurs.

Montrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(1, f, f^2, \dots, f^n)$  est libre dans l'espace  $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$ .

+\*\*4) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on pose  $P_k = (X + k)^n$ . Montrez que la famille  $\mathcal{F}_n = (P_0, \dots, P_n)$  est libre.

\*5) Soit  $a \in \mathbb{C}^*$ .  $\mathbb{C}$  est vu comme  $\mathbb{R}$ -e.v. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui à  $z$  associe  $z + a\bar{z}$ .

a) Montrez que  $f$  est linéaire.

b) Montrez que si  $|a| \neq 1$ , alors  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{C}$ .

c) Déterminez le noyau et l'image de  $f$  dans le cas où  $a = e^{i\alpha}$  (on pourra utiliser l'écriture trigonométrique des complexes).

+\*6) Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  qui conserve le degré : pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\deg f(P) = \deg P$ .

Montrez que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  (on pourra étudier les restrictions de  $f$  à  $\mathbb{K}_n[X]$ ).

+\*\*7) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , on pose  $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$ .

a) Montrez que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

b) Montrez que si  $P \in \text{Ker } f - \{0\}$ , alors  $X^2 - 1$  divise  $P$ , puis justifiez qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ,  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P = (X^2 - 1)^\alpha Q$  et  $(Q(1) \neq 0$  ou  $Q(-1) \neq 0)$ .

c) Montrez que si  $n$  est impair, alors  $f$  est un automorphisme.

d) Montrez que si  $n$  est pair, alors  $\text{Ker } f$  est une droite vectorielle. Déduisez-en la dimension de  $\text{Im } f$ .

\*\*8) On pose  $E = \mathbb{C}[X]$ . Pour  $P \in E$ , on pose  $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP(X)$ .

a) Montrez que  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

b) Déterminez  $\text{Ker } f$ .

c) Montrez que  $\text{Im } f = \{Q \in \mathbb{C}[X] \mid Q'(1) = Q(1) \text{ et } Q'(-1) = -Q(-1)\}$ . Indication : restreindre à  $\mathbb{C}_n[X]$ .

\*9) Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -e.v et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

Montrez que  $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$

+\*\*10) Soit  $E, F, G$  3  $\mathbb{K}$ -e.v,  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ .

a) Montrez que  $\text{Ker } g \circ f = \text{Ker } f \iff \text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0\}$ .

b) Montrez que  $\text{Im } g \circ f = \text{Im } g \iff \text{Ker } g + \text{Im } f = F$ .

\*\*\*11) Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On dit que  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  est un inverse à droite de  $f$  quand  $f \circ g = \text{Id}_F$ .

a) Montrez que si  $f$  possède deux inverses à droite différents, alors  $f$  en possède une infinité.

b) Montrez que si  $f$  possède un unique inverse à droite, alors  $f$  est un isomorphisme (vous admettrez l'existence d'un supplémentaire de tout s.e.v.)

+\*\*12) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie,  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $f^2 \circ g = f$  et  $\text{rg } f = \text{rg } g$ .

- Montrez que  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ .
- Montrez que  $E = \text{Ker } g \oplus \text{Im } g$ .
- Montrez que  $g^2 \circ f = g$ .

+\*\*13) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ .

- Montrez que  $p + q$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = 0$
- Dans ce cas, montrez alors que :  $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$  et  $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ .

\*\*14) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $p, q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $p \circ q = 0$ . Soit  $r = p + q - q \circ p$ .

Montrez que  $r$  est un projecteur et précisez ses éléments caractéristiques.

\*\*15) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. On suppose qu'il existe  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $f \circ g - g \circ f = \text{Id}_E$ .

- Démontrez que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$ .
- Déduisez-en que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , la famille  $(g^k)_{0 \leq k \leq n}$  est libre dans  $L(E)$ .
- Si  $E$  est de dimension finie  $p \geq 1$ , que pouvez-vous conclure ?

\*\*16) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^3 = \text{Id}_E$ . Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $u \in E$ , on veut résoudre l'équation  $x + af(x) = u$  d'inconnue  $x \in E$ .

- Montrez que pour toutes les valeurs de  $a$ , sauf une seule  $a_0$ , l'équation a une unique solution que vous calculerez.
- Dans le cas où  $a = a_0$ , donnez une condition nécessaire sur  $u$  pour qu'il existe une solution, puis si cette condition est satisfaite, déterminez une solution particulière de l'équation qui soit combinaison linéaire de  $u$  et  $f(u)$ . Concluez.

+\*\*17) Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- Montrez que  $\text{Im } f = \text{Ker } f$  si et s.si  $n$  est pair,  $\text{rg } f = \frac{n}{2}$  et  $f^2 = 0$ .
- Donnez un exemple d'une telle application linéaire  $f$ .
- Si les conditions de la question a sont satisfaites, alors on pose  $r = n/2$  : montrez qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$  (matrice par blocs).

+\*\*18) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et  $f \in L(E)$ , montrez l'équivalence

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f \iff \text{Im } f = \text{Im } f^2$$

\*19) Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ . Montrez que  $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ .

\*\*20) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ . On suppose que  $u \circ v = 0$  et  $u + v \in GL(E)$ . Démontrez que  $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = \dim(E)$ .

\*\*21) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ .

- Montrez que s'il existe  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f = g \circ \varphi$ , alors  $\text{Im } f \subset \text{Im } g$ .
- Montrez que la réciproque est vraie.

\*\*22) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ .

- Montrez que s'il existe  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f = \varphi \circ g$ , alors  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$ .
- Montrez que la réciproque est vraie.

+\*23) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de rang 1. Montrez que  $A$  peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. Déduisez-en que  $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$ .

+\*\*24) Soit  $f$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ ,  $f(AB) = f(BA)$ . Montrez que  $f$  est proportionnelle à la trace (indication : faire intervenir la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

\*\*\*25) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et  $G$  un sous-groupe de cardinal  $n$  de  $GL(E)$ .

On pose  $F = \{x \in E \mid \forall g \in G \ g(x) = x\}$ . Montrez que  $\dim F = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$ . Indication : on pourra utiliser  $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$ .

\*26) Montrez qu'il n'existe pas de couples de matrices  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  tels que  $AB - BA = I_n$ .

+\*27) Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$ . On suppose que pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$ . Montrez que  $A = B$ .

\*28) Soit  $u, v$  les deux suites réelles telles que  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = -1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = -3u_n + 10v_n$  et  $v_{n+1} = -3u_n + 8v_n$ .

Donnez des expressions de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

\*\*29) Soit  $u, v, w$  les trois suites réelles telles que  $u_0 = v_0 = w_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}w_n \\ v_{n+1} &= 5u_n - \frac{5}{2}v_n + 2w_n \\ w_{n+1} &= 4u_n - \frac{5}{2}v_n + 2w_n \end{cases}$$

Donnez des expressions de  $u_n, v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$  et leurs limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

+\*\*30) Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . On suppose connaître  $P$  un polynôme annulateur de  $A$ ,  $Q$  un polynôme annulateur de  $B$ .

On pose  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ .

- Montrez que  $PQ$  est un polynôme annulateur de  $M$  dans le cas où  $C = 0$ .
- Montrez que ce résultat reste vrai même si  $C$  n'est pas nulle. Indication : penser à un produit par blocs.

+\*\*31) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $P$  un polynôme annulateur de  $A$ . On définit  $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$  par blocs :  $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ .

- Calculez pour  $k \in \mathbb{N}$  la matrice  $B^k$  en distinguant les cas  $k$  pair et  $k$  impair.
- On pose  $Q(X) = P(X^2)$ . Montrez que  $Q$  est un polynôme annulateur de  $B$ .

+\*\*32) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $P$  un polynôme annulateur de  $A$ . On définit  $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$  par blocs :  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ .

- Calculez pour  $k \in \mathbb{N}$  la matrice  $B^k$ .
- Déterminez un polynôme annulateur de  $B$ .

+\*\*33) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E = \mathbb{K}_n[X]$ . On pose  $d : P \mapsto P'$ , endomorphisme de  $E$ , puis  $f : P \mapsto P + P'$ .

- Donnez un polynôme annulateur de  $d$ . Déduisez-en un polynôme annulateur de  $f$ .
- Montrez que  $f$  est un automorphisme, puis exprimez son inverse à l'aide de  $f$ .
- Vérifiez que  $f^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k d^k$ .

+\*\*34) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on pose  $f(M) = M + \text{tr}(M)A$ .

- Montrez que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Déterminez un polynôme annulateur de  $f$  de degré 2.
- Dans quels cas  $f$  est-il un automorphisme? Calculez  $f^{-1}$  quand on peut.
- Dans le cas contraire, vérifiez que  $f$  est un projecteur et déterminez ses éléments caractéristiques.

+\*\*35) Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $f$  possède un polynôme annulateur  $P$  vérifiant  $P(0) = 0$  et  $P'(0) \neq 0$ . Montrer qu'on a alors  $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$ .

### Oraux de concours

1) **CCINP** Soit  $E$  un e.v. de dimension finie,  $p, q$  deux endomorphismes de  $E$ . On suppose que  $p + q = \text{Id}_E$  et  $\text{rg } p + \text{rg } q \leq \dim E$ . Montrez que  $p$  et  $q$  sont deux projecteurs.

2) **IMT** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $\geq 2$ ,  $f, g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g \circ f = f$ .

- Montrez que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont des projecteurs.
- Que peut-on dire des rangs de  $f$ ,  $f \circ g$  et  $g \circ f$ ?
- Montrez que  $f \circ g$  est un projecteur sur  $\text{Im } f$ , parallèlement à un sous-espace contenant  $\text{Ker } g$ .
- On suppose désormais qu'on a aussi  $g \circ f \circ g = g$ . Que dire des rangs de  $f$  et  $g$ ?
- Montrez que  $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } g$ .

- 3) TPE** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .
- Montrez que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$ .
  - Montrez que s'il existe un entier  $p$  tel que  $\text{Im } f^{p+1} = \text{Im } f^p$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Im } f^{p+k} \subset \text{Im } f^p$ .
  - Déduisez-en que  $\text{Im } f^{n+1} = \text{Im } f^n$ .
- 4) TPE** Montrez que  $P \mapsto P - P'$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  et donnez son endomorphisme réciproque.
- 5) CEN** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie non nulle,  $u, v$  deux endomorphismes de  $E$ .
- Montrez que  $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ .
  - Soit  $F$  un sous-espace de  $E$ ,  $G, H$  deux supplémentaires de  $F$  dans  $E$ . On pose  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $q$  celui sur  $H$  parallèlement à  $F$ . Montrez que  $\text{rg}(p+q) = \text{rg}(p) + \text{rg}(q)$ .
- 6) CEN** Soit  $E$  un  $K$ -e.v. de dimension finie. Soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$  une famille libre de  $E^*$  (note :  $E^*$  est le  $K$ -e.v. des formes linéaires sur  $E$ ) et  $\psi \in E^*$ .
- Montrez que  $\psi \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$  si et s.si  $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } \psi$ .
  - On suppose que  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ . Montrez que les conditions de la question précédente sont encore équivalentes à l'existence d'un réel  $M > 0$  tel que  $\forall x \in E \quad |\psi(x)| \leq M \max_{1 \leq i \leq p} |\varphi_i(x)|$ .
- 7) CCMP** Soit  $n, k$  deux entiers tels que  $2 \leq k \leq n$ . On pose  $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $a_{i,j}^{(k)} = 1$  si  $i - j = k - 1$ , les autres coefficients étant nuls.
- Calculez  $A_k^T \cdot A_k$ .
- Soit  $p$  un projecteur de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $p \neq \text{Id}$ .
- Justifiez que  $\text{rg } p < n$ .
  - Montrez que  $p$  est la composée de deux endomorphismes nilpotents.
- 8) CCMP** Soit  $E$  un  $K$ -e.v. de dimension finie,  $f, g$  deux endomorphismes de  $E$ . On suppose  $f$  inversible et  $g$  de rang 1. Montrez que  $f + g$  est inversible si et s.si  $\text{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$ .
- 9) CCMP** Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ .
- Montrez que  $p + \text{rg}(I_n + AB) = n + \text{rg}(I_p + BA)$ .
- 10) CCMP** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMB = 0\}$ . Montrez que  $E$  est un s.e.v. de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et donnez sa dimension.
- 11) CCMP** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résolvez dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  l'équation  $M = \text{com}(M)$ .