L'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

On pose $A = f^{-1}(\{a\}) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = a\}$.

Q 1. Montrez que f est surjective.

Q 2. Montrez que A possède une borne inférieure et une borne supérieure. On note $s = \sup A$.

Q 3. Montrez que $s = \max A$.

****

Problème 1 - Intégrale de Dirichlet

I. Une intégrale généralisée

Q 1. Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge.

Q 2. Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge.

Q 3. En effectuant une intégration par parties, montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge.

On a donc démontré dans cette partie la convergence de l'intégrale de Dirichlet $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$. La suite du problème est consacrée au calcul de cette intégrale.

II. Le lemme de Lebesgue C^1

Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\, \mathrm{d}t$.

Q 4. Montrez que pour tout $x > 0$, $F(x) = f(a)\dfrac{\cos(xa)}{x} - f(b)\dfrac{cos(xb)}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_a^b f'(t)\cos(xt)\, \mathrm{d}t$.

Q 5. Déterminez une constante $K \geqslant 0$ telle que pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leqslant \dfrac{K}{x}$, puis déduisez-en la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.

III. Une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t$.

Q 6. Justifiez l'existence de l'intégrale u_n.

Q 7. Soit p, q deux réels. Donnez une expression de $\sin p - \sin q$ en fonction de $\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$: vous pouvez donner une réponse sans rédiger de démonstration.

Q 8. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrez que la suite (u_n) est constante, puis donnez la valeur de toutes les intégrales u_n.

IV. Étude d'une fonction

On pose $f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ sur $]0, \pi/2]$.

Q 9. Justifiez que f est de classe C^1 sur $]0, \pi/2]$.

Q 10. Montrez qu'on peut prolonger f par continuité en 0 en précisant la valeur de $f(0)$.

Q 11. Montrez que f ainsi prolongée est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ en vérifiant que $f'(0) = \dfrac{-1}{6}$.

V. Calcul de I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q 12. Justifiez l'existence de l'intégrale v_n.

Q 13. En utilisant les parties précédentes, montrez que $v_n - u_n$ a pour limite 0 quand $n \to +\infty$.

Q 14. Concluez ce problème en donnant la valeur de l'intégrale I, en justifiant bien sûr.

VI. Deux autres intégrales

Q 15. Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que sa valeur est également $\dfrac{\pi}{2}$.

Q 16. Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que sa valeur est aussi $\dfrac{\pi}{2}$.

****

Problème 2 - Normes p

Dans tout le problème, p désigne un réel strictement supérieur à 1 et q l'unique réel tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

On pose alors
- C l'ensemble des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles
- $E_1 = \{f \in C \ / \ f$ intégrable sur $[0, +\infty[\}$, ensemble des fonctions continues et intégrables sur $[0, +\infty[$
- $E_p = \{f \in C \ / \ |f|^p \in E_1\}$

Q 1. Montrez que E_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que la notation $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$ désigne une norme sur E_1.

Q 2.

a) Montrez que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|a+b|^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p)$.

b) Montrez que E_p est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour $f \in E_p$, on pose $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} |f|^p\right)^{1/p}$.

Q 3. Justifiez que la notation $\| \ . \ \|_p$ vérifie deux des trois axiomes d'une norme.

Q 4. En utilisant une propriété de concavité, montrez que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $xy \leqslant \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.

Q 5. Soit f, g deux éléments non nuls de E_p et E_q respectivement. Montrez que $fg \in E_1$ et que $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p.\|g\|_q$.
Indication : utiliser l'inégalité précédente avec $x = \dfrac{|f|}{\|f\|_p}$ *et* $y = \dfrac{|g|}{\|g\|_q}$.

Q 6. Soit f, g deux élements non nuls de E_p. Justifiez que $|f+g|^{p-1} \in E_q$, puis montrez que $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.
Concluez cette série de questions : que venez-vous de montrer à propos de la notation $\| \ . \ \|_p$?

Devoir surveillé 1 - Corrigé

Exercice

Q 1. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le th. des valeurs intermédiaires, $f(A)$ est un intervalle. Or $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, donc $f(A) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Donc f est surjective.

Q 2. f étant surjective, la partie A est donc non vide.

De plus, comme $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant b$, $f(x) \geqslant a+1$.

Donc A est majorée par b : en effet, s'il existe $x \in A$ tel que $x \geqslant b$, alors $f(x) = a \geqslant a+1$ ce qui est contradictoire, donc ceci prouve par l'absurde que pour tout $x \in A$, $x < b$.

De même, on montre que A est minorée, car $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

Conclusion : A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, donc elle possède une borne supérieure. De même, elle possède une borne inférieure.

Q 3. Pour montrer que $s = \max A$, il suffit de montrer que $s \in A$, puisque s est un majorant de A par définition.

Comme $s = \sup A$, il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers s.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(s)$. Or comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$, on a $f(x_n) = a$: la suite $(f(x_n))$ est donc constante égale à a, donc converge aussi vers a.

Par unicité de la limite, $f(s) = a$, *i.e.* $s \in A$.

Donc A contient sa borne supérieure, celle-ci est donc son maximum.

Problème 1

I.

Q 1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,1]$, positive et $\dfrac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$, donc on a une fausse singularité en 0 : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q 2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et pour tout $t \geqslant 1$, $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

Q 3. Soit $x \geqslant 1$. Par intégration par parties, on a

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{t=1}^{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

or d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$

et $\left[\dfrac{-\cos t}{t}\right]_{t=1}^{x} = \cos 1 - \dfrac{\cos x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \cos 1$, car $\left|\dfrac{\cos x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$, donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$.

donc par opérations sur les limites, l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, *i.e.* l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

II.

Q 4. Intégration par parties : je ne détaille pas.

Q 5. Par inégalité triangulaire, pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leqslant \dfrac{|f(a)|}{x} + \dfrac{|f(b)|}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_a^b |f'(t)|$.

La constante $K = |f(a)| + |f(b)| + \displaystyle\int_a^b |f'(t)|$ convient. Par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

III.

Q 6. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \pi/2]$, positive et $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} (2n+1)$, donc on a une fausse singularité en 0 : l'intégrale u_n converge.

Q 7. $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.

Q 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)\cos((2n+2)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+2)t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{n+2}\right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{1}{n+2}\left(\sin((n+1)\pi) - \sin 0\right) = 0.$$

Ceci prouve donc que la suite (u_n) est constante, sa valeur est donc celle de u_0, qui vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

IV.

Q 9. La fonction sin est de classe C^1 sur $]0, \pi/2]$ et ne s'y annule pas donc son inverse est aussi de classe C^1 donc par opérations sur les fonctions de classe C^1, f l'est aussi.

Q 10. Pour $t \in]0, \pi/2]$, $f(t) = \dfrac{\sin t - t}{t \sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\sin t - t}{t^2}$. Or on connaît un d.l. de sin en 0 : $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$ donc $\sin t - t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t^3}{6}$, donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t}{6} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Q 11. J'utilise le th. de limite de la dérivée dont je rappelle l'énoncé :

si f est continue sur $[0, a]$, de classe C^1 sur $]0, a]$ et si f' a une limite finie ℓ en a, alors f est de classe C^1 sur $[0, a]$ et $f'(0) = \ell$.

Ici, f prolongée par continuité satisfait les deux premières hypothèses, il reste à calculer $\lim\limits_{t\to 0} f'(t)$.

Or $f'(t) = \dfrac{-1}{t^2} + \dfrac{\cos t}{\sin^2 t} = \dfrac{t^2 \cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t} \sim \dfrac{t^2 \cos t - \sin^2 t}{t^4}$: on effectue donc un d.l. du numérateur à l'ordre 4.

$$\begin{aligned} t^2 \cos t - \sin^2 t &= t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2 \\ &= \left(t^2 - \frac{t^4}{2}\right) - \left(t^2 - 2\frac{t^4}{6}\right) + o(t^4) \\ &= \frac{-t^4}{6} + o(t^4) \sim \frac{-t^4}{6} \end{aligned}$$

donc $f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-1}{6} \xrightarrow[t\to 0]{} \dfrac{-1}{6}$.

D'après le th. rappelé précédemment, f est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.

V.

Q 12. Toujours pareil : $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} (2n+1)$, donc on a une fausse singularité en 0 : l'intégrale v_n converge.

Q 13. $v_n - u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t$, or f est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ donc d'après le lemme de Lebesgue, $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q 14. On a montré précédemment que $u_n = \dfrac{\pi}{2}$, donc grâce à la question précédente, on en déduit que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.

Par changement de variable $y = (2n+1)t$, on a $v_n = \displaystyle\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ et on sait que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = I$ (caractérisation séquentielle de la limite).

Conclusion : $I = \dfrac{\pi}{2}$.

VI.

Q 15. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, a pour limite $\dfrac{1}{2}$ en 0 (d.l. de cos...) et $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, donc par les mêmes arguments que ceux développés en partie 1, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Une intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est licite puisque les deux intégrales convergent.

Or $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1-\cos t}{t} = 0$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Q 16. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, a pour limite 1 en 0 et $\left|\dfrac{\sin^2 t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, donc par les mêmes arguments que ceux développés en partie 1, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On effectue le changement de variables $t = 2u$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ (changement de variable C^1 et bijectif) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2u)}{2u^2}\,\mathrm{d}u$,

or $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2 u$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$.

Problème 2

Q 1. C'est presque une question de cours.

C est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel connu et E_1 est une partie de C, non vide (E_1 contient la fonction nulle).

Soit $(f,g) \in E_1^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

f est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$ converge, donc par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\lambda|.|f|$ converge aussi, autrement dit $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\lambda f|$ converge, donc λf est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $\lambda f \in E_1$.

De même, comme $0 \leqslant |f+g| \leqslant |f|+|g|$ et les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g|$ convergent, alors par th. de comparaison d'intégrales de fonctions positives (TCIFP), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f+g|$ converge, donc $f+g$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, *i.e.* $f+g \in E_1$.

Tout ceci prouve que E_1 est un sous-espace vectoriel de C, donc lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

De plus, la linéarité de l'intégrale donne directement $\displaystyle\|\lambda f\|_1 = \int_0^{+\infty} |\lambda f| = \int_0^{+\infty} |\lambda|.|f| = |\lambda| \int_0^{+\infty} |f| = |\lambda|\|f\|_1$.

De même, comme $0 \leqslant |f+g| \leqslant |f|+|g|$, la croissance de l'intégrale donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f+g| \leqslant \int_0^{+\infty} (|f|+|g|) = \int_0^{+\infty} |f| + \int_0^{+\infty} |g|$, *i.e.* $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Enfin, si $\|f\|_1 = 0$, alors comme $|f|$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle, on en déduit par stricte positivité de l'intégrale que $|f| = 0$, donc que $f = 0$ (la réciproque étant vraie bien sûr).

Au total, $\|\ .\ \|_1$ est une norme sur E_1.

Q 2.

a) Par inégalité triangulaire, $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. Je note $M = \max(|a|, |b|)$, alors $|a| + |b| \leqslant 2M$, donc $|a+b| \leqslant 2M$.

La fonction puissance p-ème est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $|a+b|^p \leqslant (2M)^p = 2^p M^p$.

Et on a aussi $M^p = \max(|a|^p, |b|^p) \leqslant |a|^p + |b|^p$, donc au total, $|a+b|^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p)$.

b) Il s'agit de la même démonstration que celle de la question **Q 1**, en remplaçant l'inégalité triangulaire $0 \leqslant |f+g| \leqslant |f| + |g|$, qui avait permis de montrer la stabilité par $+$, par l'inégalité ci-dessus.

Q 3. Ici encore, c'est la même démonstration qu'en question **Q 1** en ce qui concerne les axiomes de séparation et d'homogénéité. L'inégalité triangulaire, elle, est traitée dans la suite.

Q 4. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc comme $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on a

pour tout $x, y > 0$, $\dfrac{1}{p}\ln(x^p) + \dfrac{1}{q}\ln(y^q) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q\right)$.

En appliquant l'exponentielle, qui est croissante, on obtient l'inégalité voulue mais seulement quand x et y sont non nuls. Il est facile de voir qu'elle est valable si l'un des deux est nul.

Q 5. On utilise l'indication donnée : on pose $x = \dfrac{|f|}{\|f\|_p}$ et $y = \dfrac{|g|}{\|g\|_q}$, ce qui n'est possible que si les deux fonctions sont non nulles. Dans le cas contraire, la propriété demandée est évidente.

On a donc $\dfrac{|f|}{\|f\|_p} \times \dfrac{|g|}{\|g\|_q} \leqslant \dfrac{1}{p}\dfrac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \dfrac{1}{q}\dfrac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$. Comme $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$, par TCIFP, la fonction $|f|.|g| = |fg|$ l'est aussi.

De plus, en intégrant sur $[0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|f\|_p.\|g\|_q}\int_0^{+\infty} |fg| &\leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int_0^{+\infty} |f|^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int_0^{+\infty} |g|^q \\
&= \frac{1}{p\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\|g\|_q^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |fg| \leqslant \|f\|_p.\|g\|_q$, *i.e.* $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p.\|g\|_q$.

Q 6. $q = \dfrac{p}{p-1}$ donc $(|f+g|^{p-1})^q = |f+g|^p$. Or $f, g \in E_p$ et E_p est un espace vectoriel, donc $f + g \in E_p$, *i.e.* $|f+g|^p$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $|f+g|^{p-1} \in E_q$.

Or $|f+g|^p = |f+g| \times |f+g|^{p-1} \leqslant |f| \times |f+g|^{p-1} + |g| \times |f+g|^{p-1}$.

Comme $f, g \in E_p$ et $|f+g|^{p-1} \in E_q$, on peut utiliser le résultat de la question **Q 5** :

$$\int_0^{+\infty} |f| \times |f+g|^{p-1} + |g| \times |f+g|^{p-1} \leqslant \|f\|_p.\||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p.\||f+g|^{p-1}\|_q$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f+g|^p = \|f+g\|_p^p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \left(\int_0^{+\infty} |f+g|^p\right)^{1/q}$

donc $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} |f+g|^p\right)^{1-1/q} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, *i.e.* $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Ceci prouve donc l'inégalité triangulaire pour la notation $\| \ . \ \|_p$. Au total, il a donc été montré que $\| \ . \ \|_p$ est une norme.