Mpi **Devoir de vacances 2**

À rendre le lundi 8 septembre 2025

Pour toute question : `laurent.walbron@laposte.net`, 06 68 83 35 32

Problème 1 - Une série numérique

Soient a et b deux réels non entiers et u_0 un réel non nul. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b}u_n.$$

Q 1.

a) Justifier rapidement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et de signe constant à partir d'un certain rang.

b) En déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ sont de même nature.

Q 2. On considère un réel α quelconque et, pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = n^\alpha |u_n| \quad \text{et } w_n = \ln(v_n).$$

a) Montrer qu'il existe une unique valeur de α telle que $w_{n+1} - w_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^{a-b}}$.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.

Q 3. On suppose désormais vérifiée la condition sur a et b précédente de telle sorte que $\sum u_n$ converge et on note S la somme de la série. Pour tout entier naturel n, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n}((k+1)u_{k+1} - ku_k) = (b+1)(S_{n+1} - u_0) - aS_n.$$

b) En déduire une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en fonction de a, b et u_0.

Problème 2 - Vente d'actions

Librement inspiré par un concours d'écoles de commerce de 1996.

L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbb{E}(X)$.

Le cours d'une action est modélisé par une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ (X_i est la différence entre le prix d'achat de l'action et le prix au jour i).

On étudie un modèle de vente à terme. Le banquier décide de vendre une action dans un délai maximum de n jours ($n \geqslant 2$ est choisi par le banquier, de façon parfaitement déterminé, rien d'aléatoire là-dedans) en fixant un seuil s sous lequel il ne vend pas. Tous les jours, il suit le cours de l'action : si ce cours dépasse le seuil fixé, il vend, sinon il attend le lendemain en espérant que le cours dépassera le seuil ; et si jamais au bout des n jours, le cours de l'action n'a jamais dépassé le seuil, alors il vend l'action au cours du dernier jour, même s'il est sous le seuil s.

On suppose que les variables X_i suivent la même loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 0, 2r+1 \rrbracket)$ (où r est un entier naturel non nul fixé, connu par exemple grâce à l'expérience antérieure du banquier).

L'entier n étant supérieur ou égal à 2, on définit le gain G_n par et le temps d'attente T_n par :

— si, pour tout i strictement inférieur à n, $X_i < s$; alors $G_n = X_n$ et $T_n = n$

(vente le dernier jour au prix du marché)

— et sinon, $G_n = X_k$ et $T_n = k$ où k est le plus petit rang i tel que $X_i \geqslant s$

(k est le rang du premier jour où le cours de l'action a dépassé le seuil s).

Le gain G_n est une variable aléatoire dont l'espérance est notée g_n.

Le temps d'attente T_n est une variable aléatoire dont l'espérance est notée t_n

On étudie, dans cette partie **1** trois stratégies selon la valeur du seuil s.

Q 1. Soit x un réel de $[0, 1[$ et soit k un entier naturel non nul, on pose $S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} j x^{j-1}$.

Calculer $S_k(x)$ en fonction de x et de k.

Q 2. Première stratégie.

On choisit $s = 0$. On a donc $G_n = X_1$ et $T_n = 1$, puisque le cours de l'action dépasse s dès le premier jour.

Donner l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n.

Q 3. Deuxième stratégie.

On choisit s dans l'ensemble $[\![1, 2r]\!]$ et on pose $\lambda = \dfrac{s}{2r+2}$.

a) Calculer $\mathbb{P}(X_1 < s)$ en fonction de λ.

b) Exprimer, en fonction des variables $X_1, \ldots, X_n$, l'événement $(G_n = j)$ pour $j \in [\![0, s-1]\!]$ puis pour $j \in [\![s, 2r+1]\!]$

En déduire que la loi de G_n est donnée par :

$$\forall j \in [\![0, s-1]\!] \quad \mathbb{P}(G_n = j) = \frac{1}{s}\lambda^n$$
$$\forall j \in [\![s, 2r+1]\!] \quad \mathbb{P}(G_n = j) = \frac{1}{2r+2-s}(1 - \lambda^n)$$

c) Calculer g_n.

Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé.

d) Déterminer la loi de T_n et son espérance t_n.

Déterminer la limite de t_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé.

Q 4. Troisième stratégie.

On pose $s = 2r + 1$.

a) Déterminer la loi de G_n.

b) Calculer g_n.

Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$ avec n fixé.

c) Calculer l'espérance t_n de T_n

Déterminer la limite de t_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé.

Q 5. On choisit plus exactement $s = r + 1$ dans la deuxième stratégie. Comparer brièvement les stratégies quand n est fixé et r tend vers l'infini en donnant un équivalent de g_n.

Problème 1

Q 1.

a) Comme a et b ne sont pas entiers, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n-a}{n-b}$ est bien défini et n'est pas nul, donc par récurrence immédiate, on montre que u_n est bien défini et n'est jamais nul puisque $u_0 \neq 0$.

De plus, pour $n > \max(a, b)$, le facteur $\dfrac{n-a}{n-b}$ est strictement positif donc u_{n+1} a le même signe que u_n. Donc à partir d'un certain rang, la suite u est de signe constant.

b) D'après la question précédente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = u_n$ ou il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = -u_n$ donc les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ sont de même nature.

Q 2.

a) Pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{n-a}{n-b} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ donc pour $n \geqslant N$, $w_{n+1} - w_n = \alpha \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \ln \dfrac{n-a}{n-b} = \alpha \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{b-a}{n-b}\right) = \alpha\left(\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) + \dfrac{b-a}{n-b} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = (\alpha + b - a)\dfrac{1}{n} + \dfrac{b(b-a)}{n(n-b)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = (\alpha + b - a)\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $w_{n+1} - w_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si et s.si $\alpha = a - b$.

b) Pour cette valeur de α, la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ est donc absolument convergente donc convergente, ce qui signifie que la suite (w_n) est convergente. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell}$, donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^{a-b}}$ en posant $\lambda = e^{\ell}$.

c) Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |u_n|$ converge si et s.si $a - b > 1$, donc d'après la question 1.b., la série $\sum u_n$ converge si et s.si $a - b > 1$.

Q 3.

a) Récurrence.

b) La suite (S_n) converge vers $L = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, donc la série télescopique $\sum\limits_{k\geqslant 0}((k+1)u_{k+1} - ku_k)$ a pour somme $(b+1)(L - u_0) - aL$.

Autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = (b+1)(L - u_0) - aL$. Or grâce à l'équivalent trouvé en question 2, cette limite est nulle, donc $L = \dfrac{b+1}{b-a+1}u_0$.

Problème 2

Q 1. $S_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} jx^{j-1}$: on reconnaît la dérivée de l'expression $\sum\limits_{j=1}^{k} x^j = -1 + \dfrac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$

donc $S_k(x) = \dfrac{(k+1)x^k(x-1) - (x^{k+1} - 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{(1-x)^2}$

Q 2. C'est du cours : l'espérance d'une variable uniforme sur $[\![0, 2r+1]\!]$ est $\dfrac{0 + (2r+1)}{2} = r + \dfrac{1}{2}$.

Q 3.

a) $\mathbb{P}(X_1 < s) = \sum\limits_{k=0}^{s-1} \mathbb{P}(X_1 = k)$ car $\{X_1 < s\} = \bigsqcup\limits_{k=0}^{s-1} \{X_1 = k\}$, donc $\mathbb{P}(X_1 < s) = \sum\limits_{k=0}^{s-1} \dfrac{1}{2r+2} = \dfrac{s}{2r+2}$.

b) Pour $j \in [\![0, s-1]\!]$, si l'action est vendue au cours j qui est strictement inférieur à s, alors elle a été vendue le dernier jour, donc $\{G_n = j\} = \bigcap\limits_{k=1}^{n-1} \{X_k < s\} \cap \{X_n = j\}$

Pour $j \in [\![s, 2r+1]\!]$, l'action peut avoir été vendue au cours j à n'importe quel moment donc

$$\{G_n = j\} = \bigsqcup_{\ell=1}^{n} \left(\bigcap_{k=1}^{\ell-1} \{X_k < s\} \cap \{X_k = j\} \right)$$

On en déduit donc les probabilités suivantes :

pour $j \in [\![0, s-1]\!]$, $\mathbb{P}(G_n = j) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k < s) \times \mathbb{P}(X_n = j)$ par indépendance et équidistribution des X_i,

donc $\mathbb{P}(G_n = j) = \left(\frac{s}{2r+2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2r+2} = \frac{1}{s}\left(\frac{s}{2r+2}\right)^{n} = \frac{1}{s}\lambda^n$

pour $j \in [\![s, 2r+1]\!]$, $\mathbb{P}(G_n = j) = \sum_{\ell=1}^{n} \prod_{k=1}^{\ell-1} \mathbb{P}(X_k < s) \times \mathbb{P}(X_n = j)$ par indépendance et équidistribution des X_i,

donc $\mathbb{P}(G_n = j) = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{s}{2r+2}\right)^{\ell-1} \times \frac{1}{2r+2} = \frac{1}{2r+2} \frac{1 - \left(\frac{s}{2r+2}\right)^n}{1 - \frac{s}{2r+2}} = \frac{1}{2r+2}\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$ or $1 - \lambda = \frac{2r+2-s}{2r+2}$ donc $\mathbb{P}(G_n = j) = \frac{1}{2r+2-s}(1-\lambda^n)$.

c) $g_n = \sum_{j=0}^{2r+1} j\mathbb{P}(G_n = j) = \sum_{j=0}^{s-1} j\frac{1}{s}\lambda^n + \sum_{j=s}^{2r+2} j\frac{1}{2r+2-s}(1-\lambda^n)$

$= \frac{1}{s}\lambda^n \frac{s(s-1)}{2} + \frac{1}{2r+2-s}(1-\lambda^n)\left(\frac{(2r+1)(2r+2)}{2} - \frac{s(s-1)}{2}\right) = \frac{(s-1)}{2}\lambda^n + \frac{2r+1+s}{2}(1-\lambda^n)$.

Comme $\lambda \in]0,1[$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} g_n = \frac{2r+1+s}{2}$.

d) T_n prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $\{T_n = j\} = \bigcap_{k=1}^{j-1} \{X_k < s\} \cap \{X_j \geqslant s\}$ et $\{T_n = n\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \{X_k < s\}$, donc par indépendance des X_i,

pour $j \leqslant n-1$, $\mathbb{P}(T_n = j) = \prod_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}(X_k < s) \times \mathbb{P}(X_j \geqslant s) = \lambda^{j-1}(1-\lambda)$ et $\mathbb{P}(T_n = n) = \lambda^{n-1}$.

Donc $t_n = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(T_n = j) = \sum_{j=1}^{n-1} j\lambda^{j-1}(1-\lambda) + n\lambda^{n-1} = \frac{(n-1)\lambda^n - n\lambda^{n-1} + 1}{1-\lambda} + n\lambda^{n-1} = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{1}{1-\lambda}$.

Q 4.

a) C'est le même calcul que dans la question précédente avec $s = 2r+1$.

Pour $j \in [\![0, 2r]\!]$, si l'action est vendue au cours j qui est strictement inférieur à s, alors elle a été vendue le dernier jour, donc $\{G_n = j\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \{X_k < s\} \cap \{X_n = j\}$

Pour $j = 2r+1$, l'action peut avoir été vendue au cours j à n'importe quel moment donc

$$\{G_n = 2r+1\} = \bigsqcup_{\ell=1}^{n} \left(\bigcap_{k=1}^{\ell-1} \{X_k < s\} \cap \{X_k = 2r+1\} \right)$$

On en déduit donc les probabilités suivantes :

pour $j \in [\![0, 2r]\!]$, $\mathbb{P}(G_n = j) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k < s) \times \mathbb{P}(X_n = j)$ par indépendance et équidistribution des X_i,

donc $\mathbb{P}(G_n = j) = \left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2r+2} = \frac{1}{2r+1}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)^{n} = \frac{1}{2r+1}\lambda^n$

pour $j = 2r+1$, $\mathbb{P}(G_n = 2r+1) = \sum_{\ell=1}^{n} \prod_{k=1}^{\ell-1} \mathbb{P}(X_k < s) \times \mathbb{P}(X_n = 2r+1)$ par indépendance et équidistribution des X_i, donc $\mathbb{P}(G_n = 2r+1) = 1 - \lambda^n$.

b) De même, $g_n = r\lambda^n + (2r+1)(1-\lambda^n)$.

Comme $\lambda \in]0,1[$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = 2r+1$.

c) De même, $t_n = \dfrac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \dfrac{1}{1-\lambda} = 2r+2$.

Q 5. La première stratégie donne une espérance de gain égale à $r + \dfrac{1}{2}$, indépendamment de n, donc dans ce cas, $g_n \underset{r \to +\infty}{\sim} r$.

Pour $s = r+1$, la deuxième stratégie donne une espérance de gain équivalente à $\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2^n}\right) r$ quand r tend vers $+\infty$.

Pour $s = 2r+1$, la troisième stratégie donne une espérance de gain équivalente à $\left(2 - \left(\dfrac{2r+1}{2r+2}\right)^n\right) r$ quand r tend vers $+\infty$.

Évidemment, la troisième stratégie permet d'obtenir un gain maximal en moyenne, de l'ordre de $2r$, mais le temps d'attente dans ce cas tend aussi vers $+\infty$! Si r est très grand, il faut donc en moyenne attendre très longtemps avant de vendre.

La deuxième stratégie avec $s = r+1$ permet d'obtenir un gain moyen de l'ordre de $\dfrac{3r}{2}$, mais avec un temps d'attente de l'ordre de 2 jours seulement. C'est sans doute la meilleure option des trois.