INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Montrez la convergence des intégrales suivantes et calculez leurs valeurs.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\arctan(t+1)-\arctan(t)\Big)\,\mathrm{d}t$

***2)** Justifiez les convergences des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$ et donnez leurs valeurs en vous servant de l'égalité $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

***3)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$ converge et donnez sa valeur en faisant le changement de variable $y = 1/x$.

***4)** Soit $a < b$ deux réels.

a) Déterminez une application affine φ envoyant l'intervalle $]-1, 1[$ sur $]a, b[$.

b) Déduisez-en la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$.

****5)** Montrez la convergence des intégrales suivantes et calculez leurs valeurs.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2}\,\mathrm{d}x$ (où $a > 0$)

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+3x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

****6)** On pose $C = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ et $S = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

a) Justifiez l'existence de ces trois intégrales.

b) Montrez que $C = S$.

c) Montrez que $I = 2S$ et donnez une autre relation liant $C+S$ et I.

d) Donnez la valeur des trois intégrales.

****7)** Justifiez l'existence des intégrales suivantes, puis par le changement de variable $x = \sin(t)$, montrez que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuez le changement de variable $u = \tan(t)$ dans la dernière intégrale afin d'obtenir sa valeur.

****8)** On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifiez que I est convergente.

b) Démontrez que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\quad t - \dfrac{t^3}{6} \leqslant \sin(t) \leqslant t$. Déduisez-en $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrez que : $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \int_y^{3y} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

d) Linéarisez $\sin^3(t)$. Déduisez de tout ce qui précède la valeur de I.

****9)**

a) Soit $a > 0$. Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge si et s.si $a < 2$.

b) Montrez que les intégrales suivantes convergent : $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^x)\,\mathrm{d}x$.

****10)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge. Soit $0 < a < b$.

a) Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

b) Déduisez-en que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $f(0)\ln\dfrac{b}{a}$.

****11)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et ayant une limite réelle ℓ en $+\infty$. Soit $a > 0$.

Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et donnez sa valeur en fonction de ℓ, $f(0)$ et a.

****12)** Fonction Γ d'Euler.

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrez que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

b) Donnez une relation de récurrence entre entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$. Déduisez-en la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

****13)** Une idée fausse : beaucoup pensent que si f est positive et intégrable sur $[0, +\infty[$, alors f a pour limite 0 en $+\infty$.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{2n^2}$ puis pour $x \geqslant 0$,

- ▷ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - a_n \leqslant x \leqslant n$, $f(x) = 2n^2(x - n) + 1$
- ▷ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leqslant x \leqslant n + a_n$, $f(x) = -2n^2(x - n) + 1$
- ▷ $f(x) = 0$ dans les autres cas.

Représentez la courbe de f sur $[0; 4,5]$, montrez que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ mais que f n'a pas de limite en $+\infty$.

****14)** Déterminez la nature des intégrales suivantes ($\alpha > 0$) :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + |\sin x|}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1 + \sin^2 x)}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-1/t}\,\mathrm{d}t$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^{1} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$ h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{(1-t)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\sqrt{t}}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

****15)** Montrez les comparaisons suivantes en justifiant l'existence des intégrales :

a) $\displaystyle\int_0^{X} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x \underset{X\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln X)^2$ b) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\arctan\sqrt{t}}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4x^2}$

c) $\displaystyle\int_x^{1} \frac{e^t}{\sin t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0}{\sim} -\ln x$ d) $\displaystyle\int_0^{x} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0}{\sim} 2\sqrt{x}$

e) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = o(e^{-x})$ quand $x \to +\infty$ f) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0}{\sim} -\ln x$

g) $e^{x/2} = o\left(\displaystyle\int_1^{x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t\right)$ quand $x \to +\infty$ h) $\displaystyle\int_0^{x} \frac{\ln(1+t^2)}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}\ln(x)$

****16)** Donnez des équivalents simples aux points indiqués des intégrales suivantes en justifiant leurs existences :

a) $\displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0}{\sim} ?$ b) $\displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0}{\sim} ?$

c) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} ?$ d) $\displaystyle\int_0^{x} \ln(t^2 + \sin t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} ?$

****17)** Discutez, selon α et β réels, de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$.

****18)** Soit a, α deux réels strictement positifs.

a) En effectuant le changement de variable $t = \tan x$, montrez que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + a\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1+a)t^2}\,\mathrm{d}t$, puis calculez ces intégrales et donnez la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+a\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

b) Donnez la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+(t+n\pi)^\alpha \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ selon la valeur de α.

c) Étudiez la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

****19)** Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, telles que les fonctions $t \mapsto t^2\, f(t)^2$ et $t \mapsto f'(t)^2$ soient intégrables sur $[0, +\infty[$.

a) Montrez que les fonctions $t \mapsto f(t)^2$ et $t \mapsto tf(t)^2$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

b) Montrez que la fonction $t \mapsto t\, f(t)f'(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

c) Montrez que, pour tout $x > 0$: $\displaystyle x\, f(x)^2 = \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t + 2\int_0^x t\, f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$. Déduisez-en que $x\, f(x)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

d) Démontrez que :

$$\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

Oraux de concours

1) IMT Justifiez l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

2) IMT Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \ln(1+e^{ax})\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

3) IMT Justifiez l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$ et donnez sa valeur.

4) CCINP Justifiez l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.

5) CCINP Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ? Donnez alors sa valeur.

6) IMT Soit $a > 0$. Donnez la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^a}\,\mathrm{d}x$

7) CCINP Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{x - \frac{1}{2} - \lfloor x \rfloor}{x}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculez I_k.

b) On pose $J_n = \displaystyle\int_1^{n} \frac{x - \frac{1}{2} - \lfloor x \rfloor}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrez que $J_n = n + (n + \dfrac{1}{2})\ln(n+1) - \ln n!$.

c) Montrez que $\ln n! = n\ln n - n + \ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$.

d) Montrez que la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donnez sa valeur.

e) Montrez que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} - \lfloor x \rfloor}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et donnez sa valeur.

8) CCINP Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$, $v_n = e^{-\sqrt{n}}$ et $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrez que la série $\sum v_n$ converge.

b) Montrez que I_n existe et $I_n = 2(1+\sqrt{n})v_n$.

c) On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$. Montrez que $I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I_n$ et donner un équivalent de R_n.

d) On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrez que $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{R_n}{\sqrt{e}}$.

9) CEN Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$.

a) On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Montrez qu'elles convergent vers la même limite.

b) Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) I_n$.

c) Montrez qu'il existe des réels a et b tels que $\ln I_n = a\ln n + b + o(1)$.

d) Montrez que la série de terme général I_n converge.

10) CCMP Soit $y \in \mathbb{R}$. Calculez $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}\,\mathrm{d}x$.

11) CCMP Soit $y \in \mathbb{R}$. Justifiez l'existence et calculez $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)}\,\mathrm{d}x$.

12) CCMP Soit $\alpha > 0$. Étudiez la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1\right)\mathrm{d}t$.

13) CCMP Soit $a \in [0,1[$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux telle que $f(x+1)/f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$. Montrez que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.