Exercice 2

1. Pour tout $(A,B)\in\mathbb{C}[X]^2$, si $B\neq 0$, alors

pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$, il existe un unique couple $(Q,R)\in\mathbb{C}[X]^2$ tel que $\begin{cases} A=BQ+R \\ \deg(R)<\deg(B)\end{cases}$

2. $X^n-1=(X^n-X)+(X-1)=1\times(X^n-X)+(X-1)$ et comme $\deg(X-1)=1<\deg(X^n-X)=n$, donc le quotient de la division euclidienne de A par B est 1 et le reste est $X-1$.

3. D'après l'algorithme d'Euclide, $\mathrm{pgcd}(A,B)=\mathrm{pgcd}(B,X-1)=X-1$ car $X-1$ divise B

4. Les racines de A sont les racines n-èmes de l'unité : les complexes $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k\in[\![1,n]\!]$.
$B=X(X^{n-1}-1)$ donc les racines de B sont les racines $n-1$-èmes de l'unité et 0.

Dans la suite, on pose donc $z_k=\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$ et $z_n=0$.

******

5. Soit $(P_1,P_2)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{C}$.
On effectue trois divisions euclidiennes :

$$\begin{aligned} AP_1&=BQ_1+R_1 \text{ et } \deg R_1<n=\deg B\\ AP_2&=BQ_2+R_2 \text{ et } \deg R_2<n=\deg B\\ A(P_1+\lambda P_2)&=BQ_3+R_3 \text{ et } \deg R_3<n=\deg B\end{aligned}$$

Donc on obtient $A(P_1+\lambda P_2)=BQ_3+R_3=B(Q_1+\lambda Q_2)+(R_1+\lambda R_2)$ et $\deg R_3<n$, $\deg(R_1+\lambda R_2)<n$: on a donc deux divisions euclidiennes de $A(P_1+\lambda P_2)$.
Par unicité de celle-ci, on en déduit en particulier que $R_3=R_1+\lambda R_2$, c'est-à-dire $f(P_1+\lambda P_2)=f(P_1)+\lambda f(P_2)$.
Ceci prouve la linéarite de f. De plus, pour tout $P\in E$, $\deg f(P)<\deg B=n$ donc $f(P)\in E$. Au total, f est un endomorphisme de E.

6. Pour $k\in[\![0,n-2]\!]$, $AX^k=X^{n+k}-X^k=X^k(X^n-X)+X^{k+1}-X^k$: comme $\deg(X^{k+1}-X^k)=k+1\leqslant n-1<\deg B$, on en déduit que $f(X^k)=X^{k+1}-X^k$.

7. De même,

$$\begin{aligned} AX^{n-1}&=X^{n-1}(X^n-X)+X^n-X^{n-1}\\ &=X^{n-1}(X^n-X)+(X^n-X)-X^{n-1}+X\\ &=(X^{n-1}+1)(X^n-X)+(-X^{n-1}+X)\end{aligned}$$

Comme $\deg(-X^{n-1}+X)=n-1<\deg B$, on en déduit que $f(X^{n-1})=-X^n+X$.

8. $M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

9. Il est alors évident que $\mathrm{tr}(M)=-n$.

Étude du noyau et de l'image de f

10. La suite d'opérations élémentaires $L_2\leftarrow L_2+L_1$, $L_3\leftarrow L_3+L_2$, …, $L_n\leftarrow L_n+L_{n-1}$ (dans cet ordre) transforme M en une matrice équivalente (= de même rang) :

$$M\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -0\end{pmatrix}$$

et on voit parfaitement que cette dernière matrice est de rang $n-1$, puisqu'elle est triangulaire supérieure de diagonale $(-1,\ldots,-1,0)$, donc $\mathrm{rg}(M)=n-1$.

11. $E = \mathrm{vect}(1, X, \ldots, X^{n-1})$ donc par linéarité de f, $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \mathrm{vect}(f(1), f(X), \ldots, f(X^{n-1}))$.
Comme la famille $(f(1), f(X), \ldots, f(X^{n-1}))$ est de rang $n-1$, un des vecteurs peut être supprimé sans changer le sous-espace engendré. Or les $n-1$ premiers vecteurs sont linéairement indépendants, puisqu'ils forment une famille de polynômes étagés en degré, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(1), f(X), \ldots, f(X^{n-2}))$, donc $(f(1), f(X), \ldots, f(X^{n-2}))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

12. Daprès le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - \mathrm{rg}(f) = n - (n-1) = 1$: $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle. Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donc formée d'un seul vecteur.
Or il est facile de vérifier que le polynôme $S = \sum_{j=1}^{n-1} X^j$ appartient à f en effectuant le produit matriciel de M avec la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ | \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$ des coordonnées de S dans la base canonique.
Donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est (S).

13. Pour tout $P \in E$, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $AP = BQ + f(P)$, or A et B ont pour racine commune 1, donc en évaluant en 1 cette égalité polynômiale, on obtient $f(P)(1) = 0$, autrement dit $X - 1$ divise $f(P)$ donc $f(P) = (X-1)U$ où $U \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$ (car $\deg P \leqslant n-1$).
Ceci prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}$.
Or l'ensemble de droite est aussi un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, car il est isomorphe à $\mathbb{C}_{n-2}[X]$ *via* l'application linéaire $P \mapsto (X-1)P$.
Donc par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(f) = \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}$.

14. $\mathrm{Im}(f)$ est un hyperplan de E et S n'est pas un vecteur de $\mathrm{Im}(f)$, donc $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{vect}(S) = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Éléments propres de f

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On note P_j le polynôme de E défini par $P_j = \dfrac{B}{X - z_j} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (X - z_k)$ et $R_j = f(P_j)$.

15. B possède n racines distinctes, donc les racines de P_j sont toutes différentes de z_j.

16. Par définition de R_j, il existe $Q_j \in C[X]$ tel que $AP_j = BQ_j + R_j$ donc $AP_j = (X - z_j)Q_jP_j + R_j$ donc P_j divise R_j : les racines de P_j sont toutes raciens de R_j.

17. On vient de montrer que P_j divise R_j, donc il existe $U_j \in \mathbb{C}[X]$ tel que $R_j = U_jP_j$ donc $\deg R_j = \deg U_j + \deg P_j = \deg U_j + n - 1$. Or $\deg R_j \leqslant n-1$, donc il vient $\deg U_j \leqslant 0$: le polynôme U_j est un polynôme constant qu'on note λ_j.
On a donc montré l'existence de $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tel que $f(P_j) = \lambda_j P_j$: P_j est donc un vecteur propre de f puisque $P_j \neq 0$ et λ_j est la valeur propre associée.

18. On reprend l'égalité polynômiale précédente : $AP_j = (X - z_j)Q_jP_j + \lambda_jP_j$ et on évalue en z_j.
On obtient $A(z_j)P_j(z_j) = \lambda_jP_j(z_j)$, or $P_j(z_j) \neq 0$ donc $A(z_j) = \lambda_j$.

19. On en déduit que $\lambda_j = A(z_j) = z_j^n - 1 = z_j - 1$ car z_j est racine de B donc vérifie l'égalité $z_j^n - z_j = 0$.
En particulier, $\lambda_n = -1$ (et aussi $\lambda_{n-1} = 0$ car $z_{n-1} = 1$).