À rendre le lundi 1er septembre 2025

Pour toute question : laurent.walbron@laposte.net, 06 68 83 35 32

Problème - d'après E3A MPI 2025

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note dans tout l'exercice :

- $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$
- A et B les deux polynômes : $A = X^n - 1$ et $B = X^n - X$.

Questions préliminaires

1. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B .
On pourra poser la division euclidienne de A par B .
3. Déterminer le PGCD des polynômes A et B .
4. Décomposer les deux polynômes A et B en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Les n racines distinctes de B seront notées : $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ et z_n , avec $z_n = 0$.

On considère l'application f qui à tout polynôme P de E , associe le reste de la division euclidienne du produit AP par B .

5. Prouver que f est un endomorphisme de E : on pourra effectuer de deux façons la division euclidienne de $A(P_1 + P_2)$ par B .
6. Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. En posant la division euclidienne, déterminer $f(X^k)$.
7. De la même façon, déterminer $f(X^{n-1})$.
8. En déduire la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ de E .
9. Calculer la trace de M .

Étude du noyau et de l'image de f

10. Justifier que le rang de M est égal à $n-1$.
11. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
12. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
13. Justifier que $\text{Im}(f) = \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}$.
14. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E .

Éléments propres de f

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note P_j le polynôme de E défini par $P_j = \frac{B}{X - z_j} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (X - z_k)$ et $R_j = f(P_j)$.

15. Vérifier que $P_j(z_j) \neq 0$.
16. Montrer que les racines de P_j sont racines de R_j .
17. En déduire qu'il existe un scalaire λ_j tel que $R_j = \lambda_j P_j$. Que peut-on alors dire du polynôme P_j ?
18. Montrer que l'on a : $A(z_j) = \lambda_j$.
19. En déduire l'expression de λ à l'aide de z_j . On précisera la valeur de λ_n .