Corrigé du problème Mines-Ponts 2011 (math 2)

Calcul des variations

Corrigé rédigé par Gérard Debeaumarché et Roger Mansuy

A) Préliminaire

1°) On a $1 + j^2 + j^4 = \left(1 - j^6\right) / \left(1 - j^2\right) = 0$ puisque $j^3 = 1$, donc $j^6 = 1$.

2°) Cherchons les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A, en recherchant les complexes λ et les vecteurs non nuls $X \in \mathbb{C}^4$ tels que $AX = \lambda X$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Ce système équivaut à $y = \lambda\, x$, $z = \lambda\, y = \lambda^2\, x$, $t = \lambda\, z = \lambda^3\, x$ et sa dernière équation à :

$$x + z + \lambda\, t = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left(1 + \lambda^2 + \lambda^4\right) x = 0.$$

Dans cette dernière équation, x ne peut être nul, sinon X est le vecteur nul, et l'équation équivaut donc à $1 + \lambda^2 + \lambda^4 = 0$, et comme $1 + j^2 + j^4 = 1 + (-j)^2 + (-j)^4 = 0$, on voit que j et $-j$, et donc leurs conjugués j^2 et $-j^2$ sont les racines de $1 + \lambda^2 + \lambda^4 = 0$.

Ainsi, la matrice A possède les quatre valeurs propres distinctes $\pm j$ et $\pm j^2$ et comme c'est une matrice d'ordre 4, elle est diagonalisable avec :

- *pour vecteurs propres V associés à j* : $V \in \mathrm{Vect}\left(1,\, j,\, j^2,\, 1\right)$.
- *pour vecteurs propres V associés à -j* : $V \in \mathrm{Vect}\left(1,\, -j,\, j^2,\, -1\right)$.
- *pour vecteurs propres V associés à* j^2: $V \in \mathrm{Vect}\left(1,\, j^2,\, j,\, 1\right)$.
- *pour vecteurs propres V associés à* $-j^2$: $V \in \mathrm{Vect}\left(1,\, -j^2,\, j,\, -1\right)$.

La matrice de passage de la base canonique une base de vecteurs propres est donc :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & -j & j^2 & -j^2 \\ j^2 & j^2 & j & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Et $U^{-1}\, A\, U = D$ est alors la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base de vecteurs propres, c'est à dire $U^{-1}\, A\, U = \mathrm{Diag}\left(j,\, -j,\, j^2,\, -j^2\right)$.

3°) Le système $X' = A\,X$ s'écrit $X' = U\,D\,U^{-1}\,X$, c'est à dire $Y' = D\,Y$ avec $X = U\,Y$, et ses solutions Y ont pour composantes (avec des constantes k_1, k_2, k_3, k_4) :

$$y_1(t) = k_1 \exp(j\,t), \quad y_2(t) = k_2 \exp(-j\,t), \quad y_3(t) = k_3 \exp\left(j^2\,t\right), \quad y_4(t) = k_4 \exp\left(-j^2\,t\right).$$

On en déduit les solutions $X = U\,Y$ du système $X' = A\,X$:

$$X(t) = k_1 \exp(j\,t)\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \exp(-j\,t)\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j^2 \\ -1 \end{pmatrix} + k_3 \exp\left(j^2\,t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} + k_4 \exp\left(-j^2\,t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \\ j \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Celles-ci forment bien un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{C}$.

4°) On ramène une équation différentielle linéaire d'ordre 4 à un système linéaire (4, 4) du premier ordre en posant $Y = {}^t\left(y, y', y'', y^{(3)}\right)$, car il y a alors équivalence entre :

- y est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y^{(4)} + y'' + y = 0$.
- Y est solution sur $\mathbb{R}$ du système $Y' = A\,Y$ qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, les solutions y de l'équation $y^{(4)} + y'' + y = 0$ sont données par :

$$y(t) = k_1 \exp(j\,t) + k_2 \exp(-j\,t) + k_3 \exp\left(j^2\,t\right) + k_4 \exp\left(-j^2\,t\right) \quad \text{où} \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{C}.$$

Parmi ces solutions, les solutions réelles sont celles égales à leurs conjuguées, soit :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad k_1\,e^{j\,t} + k_2\,e^{-j\,t} + k_3\,e^{j^2\,t} + k_4\,e^{-j^2\,t} = \overline{k_1}\,e^{j^2\,t} + \overline{k_2}\,e^{-j^2\,t} + \overline{k_3}\,e^{j\,t} + \overline{k_4}\,e^{-j\,t}.$$

Comme l'indépendance des quatre fonctions $t \longrightarrow e^{\pm j\,t}$ et $t \longrightarrow e^{\pm j^2\,t}$ est immédiate (car il s'agit de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme de dérivation dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$), on a par identification $\overline{k_3} = k_1$ et $\overline{k_4} = k_2$, d'où :

$$y(t) = k_1 \exp(j\,t) + k_2 \exp(-j\,t) + \overline{k_1} \exp\left(j^2\,t\right) + \overline{k_2} \exp\left(-j^2\,t\right).$$

Soit encore en posant $2\,k_1 = a - i\,b$ et $2\,k_2 = c + i\,d$ où a, b, c, d sont réels :

$$y(t) = e^{-t/2}\left(a \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + b \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right) + e^{t/2}\left(c \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + d \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

B) Lemme de Du Bois-Reymond

5°) On pose $h(t) = \left(1 - t^2\right)^3$ si $|t| \le 1$ et $h(t) = 0$ sinon, de sorte que h est continue sur $\mathbb{R}$ et clairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$.

Comme ± 1 sont racines d'ordre 3 du polynôme $\left(1 - X^2\right)^3 = (1 - X)^3\,(1 + X)^3$, on voit :

- que les dérivées d'ordre 1 et 2 à gauche en 1 de la fonction h sont nulles.
- que les dérivées d'ordre 1 et 2 à droite en -1 de la fonction h sont nulles.

Comme les dérivées d'ordre 1 et 2 à droite en 1 et à gauche en -1 de h sont aussi nulles, la fonction h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (mais elle n'est pas de classe C^3 puisqu'en 1, la dérivée troisième de h est égale à -48 à gauche, et à 0 à droite.

6°) Si $x_0 < x_1$, la fonction définie par $g(x) = (x - x_0)^3\,(x_1 - x)^3$ si $x_0 < x < x_1$ et nulle sinon est par le même raisonnement de classe C^2 (mais pas C^3) sur $\mathbb{R}$, et on a d'ailleurs :

$$g(x) = \frac{(x_1 - x_0)^6}{64}\, h\left(\frac{2\,x - (x_0 + x_1)}{x_1 - x_0}\right).$$

Bien évidemment, cette fonction u est strictement positive sur $]x_0,\, x_1[$ et nulle ailleurs.

7°) Soit $E^2_{a,b}$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $[0,\, 1]$ telles que $f(0) = a$, $f(1) = b$, et soit $F : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle qu'on ait :

$$\forall\, u \in E^2_{0,0},\quad \int_0^1 F(x)\, u(x)\, \mathrm{d}x \;=\; 0.$$

S'il existe un point t de $[0,1]$ en lequel F est non nulle, par exemple strictement positive quitte à changer F en $-F$, on sait par continuité de F en t que F reste strictement positive sur un segment $[x_0,\, x_1]$ contenant t et inclus dans $[0,\, 1]$.

On a alors avec $u(x) = (x - x_0)^3\,(x_1 - x)^3$ si $x_0 < x < x_1$ et $u(x) = 0$ sinon :

$$\int_0^1 F(x)\, u(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \int_{x_0}^{x_1} F(x)\, u(x)\, \mathrm{d}x \;=\; 0.$$

Or c'est impossible puisque la fonction $x \longrightarrow F(x)\, u(x)$ est continue et strictement positive sur $[x_0,\, x_1]$: cette contradiction montre qu'un tel point t n'existe pas dans $[0,\, 1]$.

Ainsi, F est nulle sur $[0,\, 1]$, de sorte que F est la fonction nulle.

C) Condition d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, P et Q sont deux polynômes donnés de $\mathbb{R}[X]$ et on pose :

$$\forall\, f \in E^2_{a,b},\quad J(f) = \int_0^1 [P(f(x)) + Q(f'(x))]\, \mathrm{d}x.$$

On désigne alors par f_0 un élément de $E^2_{a,b}$ en lequel J est minimale sur $E^2_{a,b}$.

8°) On pose $q(t) = J(f_0 + t\,u)$ pour tout élément u de $E^2_{0,0}$ de sorte qu'on a :

$$q(t) = \int_0^1 [P(f_0(x) + t\,u(x)) + Q(f_0{}'(x) + t\,u'(x))]\, \mathrm{d}x.$$

Par application de la formule de Taylor pour les polynômes, on a :

$$q(t) = \int_0^1 \Big[\sum_{k=0}^{\mathrm{d}^\circ P} P^{(k)}(f_0(x))\, \frac{t^k (u(x))^k}{k\,!} + \sum_{k=0}^{\mathrm{d}^\circ Q} Q^{(k)}(f_0{}'(x))\, \frac{t^k (u'(x))^k}{k\,!}\Big]\, \mathrm{d}x.$$

D'où en posant $r = \max(\mathrm{d}^\circ P,\, \mathrm{d}^\circ Q)$ et en exploitant la linéarité de l'intégrale :

$$q(t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{t^k}{k\,!} \int_0^1 \big[\, P^{(k)}(f_0(x))\, (u(x))^k + Q^{(k)}(f_0{}'(x))\, (u'(x))^k \big]\, \mathrm{d}x.$$

Il en résulte que la fonction q est bien polynomiale, et le coefficient de t est égal à :

$$\int_0^1 [\, P'(f_0(x))\, u(x) + Q'(f_0{}'(x))\, u'(x)]\, \mathrm{d}x.$$

9°) Si $J(f_0) \leq J(f)$ pour toute fonction $f \in E^2_{a,b}$, on a $J(f_0) \leq J(f_0 + t\,u)$ pour tout $u \in E^2_{0,0}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ en faisant $f = f_0 + t\,u$ et en remarquant qu'on a bien alors $f \in E^2_{a,b}$.
La fonction polynôme $t \longrightarrow q(t)$ a donc un minimum en $t = 0$, sa dérivée s'y annule donc et comme sa dérivée en $t = 0$ est précisément le coefficient de t dans le polynôme q, on a :

$$\int_0^1 [\,P'(f_0(x))\,u(x) + Q'(f_0{}'(x))\,u'(x)]\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

Une intégration par parties effectuée sur le second terme donne alors :

$$[Q'(f_0{}'(x))\,u(x)]_0^1 + \int_0^1 [\,P'(f_0(x))\,u(x) - f_0{}''(x)\,Q''(f_0{}'(x))\,u(x)]\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

Le crochet est nul car $u \in E^2_{0,0}$ et l'intégrale est donc nulle pour tout $u \in E^2_{0,0}$.
Le résultat de la question 7° (dont les hypothèses sont clairement vérifiées) donne alors :

$$\forall\, x \in [0,\,1],\quad P'(f_0(x)) - f_0{}''(x)\,Q''(f_0{}'(x)) \;=\; 0 \qquad \text{ou} \qquad P'(f_0(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(Q'(f_0{}'(x))).$$

10°) *Exemple 1* : on pose ici (avec $P(X) = 0$ et $Q(X) = X^2$) :

$$\forall\, f \in E^2_{0,1},\quad J_1(f) = \int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

La condition d'Euler-Lagrange implique donc, s'il y a minimum de J_1 en f_0 :

$$\forall\, x \in [0,\,1],\quad f_0{}''(x) \;=\; 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(f_0{}'(x)) = 0.$$

Si $f_0 \in E^2_{0,1}$, c'est à dire si $f_0(0) = 0$ et $f_0(1) = 1$, on en déduit que $f_0(x) = x$.

11°) Ainsi donc, si J_1 admet un minimum dans $E^2_{0,1}$, c'est nécessairement en $f_0(x) = x$, et ce minimum vaut alors $J_1(f_0) = 1$.
Vérifions réciproquement qu'il s'agit d'un minimum, et considérons un élément $f \in E^2_{0,1}$, c'est à dire un élément $f = f_0 + u$ (c'est à dire $f(x) = x + u(x)$) où u appartient à $E^2_{0,0}$:

$$J_1(f_0 + u) = \int_0^1 (1 + u'(x))^2\,\mathrm{d}x \;=\; J_1(f_0) + 2\int_0^1 u'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (u'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de la nullité de u en 0 et 1, l'avant-dernière intégrale est nulle et il reste :

$$J_1(f_0 + u) - J_1(f_0) = \int_0^1 (u'(x))^2\,\mathrm{d}x \;\geq\; 0.$$

Ainsi, il y a minimum de J_1 en f_0, et comme $(u')^2$ est continue et positive, son intégrale est nulle si et seulement $u' = 0$, donc si et seulement si $u = 0$ puisqu'on a $u(0) = u(1) = 0$. Le minimum de J_1 est donc atteint uniquement en $x \longrightarrow f_0(x) = x$.

12°) *Exemple 2* : on pose ici (avec $P(X) = 0$ et $Q(X) = X^2 + X^3$) :

$$\forall\, f \in E^2_{0,0},\quad J_2(f) = \int_0^1 \big((f'(x))^2 + (f'(x))^3\big)\,\mathrm{d}x.$$

La condition d'Euler-Lagrange implique donc, s'il y a minimum de J_2 en f_0 :

$$\forall\, x \in [0,\, 1], \quad f_0''(x)\,(2 + 6\, f_0'(x)) \;=\; 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2\, f_0'(x) + 3\,(f_0'(x))^2\right) = 0.$$

Il en résulte qu'il existe un réel k tel que :

$$\forall\, x \in [0,\, 1], \quad 3\,(f_0'(x))^2 + 2\, f_0'(x) + k = 0.$$

Pour tout $x \in [0,\, 1]$, le réel $f_0'(x)$ est donc l'une des racines r_k^+ et r_k^- de cette équation, et par continuité de f_0', on a soit $\forall\, x \in [0,\, 1]$, $f_0'(x) = r_k^+$, soit $\forall\, x \in [0,\, 1]$, $f_0'(x) = r_k^-$.
Ainsi, f_0' est constante, et comme $f_0 \in E^2_{0,0}$, la fonction f_0 est nécessairement nulle.

13°) Ainsi donc, si J_2 admet un minimum dans $E^2_{0,0}$, c'est nécessairement en $f_0 = 0$, et ce minimum vaut alors $J_2(f_0) = 0$.
Par ailleurs, la fonction f définie par $f(x) = \lambda\, x^2(1 - x)$ appartient à $E^2_{0,0}$ et on a :

$$J_2(\lambda\, f) = \int_0^1 \left(\lambda^2\left(2\,x - 3\,x^2\right)^2 + \lambda^3\left(2\,x - 3\,x^2\right)^3\right) \mathrm{d}x \;=\; \frac{2\,\lambda^2}{15} - \frac{2\,\lambda^3}{35} = \frac{2\,\lambda^2}{105}\,(7 - 3\,\lambda).$$

Il en résulte que $J_2(\lambda\, f) - J_2(f_0) = \; J_2(\lambda\, f) = \frac{2\,\lambda^2}{105}\,(7 - 3\,\lambda)$.
Quitte à choisir $7 - 3\,\lambda < 0$, ou $\lambda > 7/3$, on observe qu'il n'y a pas minimum en $f_0 = 0$, et la condition nécessaire d'extremum d'Euler-Lagrange n'est donc pas suffisante.

D) Un exemple avec dérivée seconde

14°) Pour toute fonction f de classe C^2 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall\, x \geq 0, \quad |f(x)\, f''(x)| \leq \frac{1}{2}\left((f(x))^2 + (f''(x))^2\right).$$

Il en résulte que $f\, f''$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si f et f'' sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Si $f\, f'$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $a \geq 0$ tel qu'on ait $f(x)\, f'(x) \geq 1$ pour $x \geq a$, d'où :

$$\forall\, A \geq a, \quad f^2(A) = f^2(a) + 2\int_a^A f(x)\, f'(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; f^2(a) + 2\,(A - a).$$

On en déduit que f^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et f^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Cette contradiction montre que $f\, f'$ ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

15°) Considérons la fonction croissante $A \longrightarrow \int_0^A (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$, qui vérifie :

$$(\mathcal{R}) \qquad \int_0^A (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \;=\; f(A)\, f'(A) - f(0)\, f'(0) - \int_0^A f(x)\, f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'après ce qui précède, le membre de droite ne tend pas vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$, et la fonction croissante $A \longrightarrow \int_0^A (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$ est donc majorée. Il en résulte que la fonction positive $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ainsi que la fonction $f\, f'$ d'après l'inégalité suivante :

$$\forall\, x \geq 0, \quad |f(x)\, f'(x)| \leq \frac{1}{2}\left((f(x))^2 + (f'(x))^2\right).$$

Comme $(f')^2$ et $f\,f''$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, la relation $(\mathcal{R})$ montre que la fonction $f\,f'$ a une limite finie L en $+\infty$, égale au réel L défini par :

$$L = f(0)\,f'(0) + \int_0^{+\infty} (f'(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\,f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si $L \neq 0$, il existe $a \geq 0$ tel qu'on ait $|f(x)\,f'(x) - L| \leq |L|/2$ pour $x \geq a$, d'où :

$$\forall\, A \geq a,\quad \left|f^2(A) - f^2(a) - 2\,L(A-a)\right| \leq 2\int_a^A |f(x)\,f'(x) - L|\,\mathrm{d}x \;\leq\; |L|\,(A-a).$$

Il en résulte qu'on a : $\forall\, A \geq a,\quad f^2(A) \geq f^2(a) + |L|\,(A-a)$.

On en déduit que f^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et f^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Cette contradiction montre que la limite de $f\,f'$ en $+\infty$ est $L = 0$.

16°) On pose pour $f \in C^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables :

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right]\mathrm{d}x.$$

Si J a un minimum en f_0, un raisonnement analogue donne la condition d'Euler-Lagrange :

$$f_0^{(4)} + f_0^{(2)} + f_0 \;=\; 0.$$

D'après les résultats de la partie A, on a avec des constantes réelles a, b, c, d :

$$f_0(t) = e^{-t/2}\left(a\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + b\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right) + e^{t/2}\left(c\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + d\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Si $c = d = 0$, la fonction f_0 est bien de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ainsi que ses dérivées.

Sinon, f_0 peut s'écrire comme suit, avec un réel positif t_0 dépendant de c et d :

$$f_0(t) = \sqrt{c^2 + d^2}\;e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,(t-t_0)\right) + O\left(e^{-t/2}\right).$$

On en tire la relation suivante, où le réel positif M désigne une borne de l'expression $O(1)$:

$$f_0^2(t) = \left(c^2+d^2\right)e^t\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,(t-t_0)\right) + O(1) \;\geq\; \left(c^2+d^2\right)e^t\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,(t-t_0)\right) - M.$$

Le changement de variables $u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(t-t_0)$ donne alors :

$$\int_{t_0}^{t_0+2n\pi/\sqrt{3}} f_0^2(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{n\pi} f_0^2\left(t_0 + \frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}u.$$

Et la minoration précédente donne alors :

$$\int_{t_0}^{t_0+2n\pi/\sqrt{3}} f_0^2(t)\,\mathrm{d}t \;\geq\; \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{n\pi}\left(\left(c^2+d^2\right)e^{t_0+2u/\sqrt{3}}\cos^2(u) - M\right)\mathrm{d}u.$$

D'où en découpant l'intégrale et en minorant l'exponentielle sur chaque intervalle :

$$\int_{t_0}^{t_0+2n\pi/\sqrt{3}} f_0^2(t)\,\mathrm{d}t \;\geq\; \frac{2}{\sqrt{3}}\left(c^2+d^2\right)\sum_{k=0}^{n-1} e^{t_0+2k\pi/\sqrt{3}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\cos^2(u)\,\mathrm{d}u - n\,M\,\pi.$$

Et par π-périodicité de la fonction $\cos^2$, dont l'intégrale sur $[0, \pi]$ vaut $\pi/2$, on a :

$$\int_{t_0}^{t_0+2n\pi/\sqrt{3}} f_0^2(t)\,\mathrm{d}t \;\geq\; \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(c^2+d^2\right)\sum_{k=0}^{n-1} e^{t_0+2k\pi/\sqrt{3}} - n\,M\,\pi.$$

On en déduit par sommation :

$$\int_{t_0}^{t_0+2n\pi/\sqrt{3}} f_0^2(t)\,\mathrm{d}t \;\geq\; \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(c^2+d^2\right)e^{t_0}\,\frac{e^{2n\pi/\sqrt{3}}-1}{e^{2\pi/\sqrt{3}}-1} - n\,M\,\pi.$$

Comme cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que f_0^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $(c, d) \neq (0, 0)$.

Les solutions de $f_0^{(4)} + f_0^{(2)} + f_0 \;=\; 0$ telles que f_0 et f_0'' sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ sont donc données par l'expression suivante (avec a et b réels) :

$$f_0(t) = e^{-t/2}\left(a\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + b\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right) = a\,e_1(t) + b\,e_2(t).$$

17°) Si $f \in C^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est telle que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ réalise un minimum de J, la condition d'Euler-Lagrange montre que $f_0^{(4)} + f_0^{(2)} + f_0 \;=\; 0$, et que :

$$f_0(t) = e^{-t/2}\left(a\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + b\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right) = a\,e_1(t) + b\,e_2(t).$$

Or on vérifie facilement que e_1 et e_2, et donc f_0, vérifient l'équation $f_0'' + f_0' + f_0 \;=\; 0$, De plus, le calcul donné dans l'énoncé donne :

$$J(f_0) = J(a\,e_1 + b\,e_2) = \frac{a^2}{4} + \frac{3\,b^2}{4} + \frac{a\,b\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Par conséquent, la minimalité de $J(f_0)$ implique $J(f_0) = 0$, donc $a = -b\sqrt{3}$, d'où :

$$f_0(t) = 2\,b\,e^{-t/2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2\,b\,e^{-t/2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

18°) Pour $f \in C^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables et pour $A > 0$, on a :

$$\int_0^A \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right]\mathrm{d}x - \int_0^A [f(x) + f'(x) + f''(x)]^2\,\mathrm{d}x \;=$$

$$-2\int_0^A \left[(f'(x))^2 + f(x)\,f'(x) + f(x)\,f''(x) + f'(x)\,f''(x)\right]\mathrm{d}x \;= -\left[(f(x) + f'(x))^2\right]_0^A.$$

La formule proposée en résulte.

D'autre part, les fonctions f, f', f'' sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$et on a :

$$[f + f' + f'']^2 = f^2 + f'^2 + f''^2 + 2\,f\,f' + 2\,f'\,f'' + 2\,f''\,f$$

et avec l'inégalité classique $2\,a\,b \leq a^2 + b^2$, on en tire :

$$[f + f' + f'']^2 \leq 3\left(f^2 + f'^2 + f''^2\right).$$

Ainsi, $f + f' + f''$ est aussi de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et la formule démontrée au début de la question montre que $(f(A) + f'(A))^2$ a une limite finie L si A tend vers $+\infty$.

De plus, l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2\,a^2 + 2\,b^2$ donne $(f + f')^2 \leq 2\,f^2 + 2\,f'^2$ et l'intégrabilité des carrés des fonctions f et f' assure l'intégrabilité de $(f + f')^2$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $L = 0$ car sinon, la fonction $(f + f')^2$ ne serait pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit finalement que :
$$\int_0^{+\infty}\left[(f(x))^2-(f'(x))^2+(f''(x))^2\right]\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]^2\,\mathrm{d}x=(f(0)+f'(0))^2.$$
Ce qui montre encore qu'on a :
$$J(f)=(f(0)+f'(0))^2+\int_0^{+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]^2\,\mathrm{d}x\ \geq\ 0.$$
Il en résulte qu'on a pour tout réel λ l'inégalité $J(f)\geq J(\lambda\,\psi)=0$.
Ainsi, J admet un minimum en $\lambda\,\psi$, quelle que soit la valeur du réel λ.

19°) La démonstration précédente montre que $J(f)$ est positive, et qu'elle est nulle si et seulement si on a simultanément :
$$f(0)+f'(0)=0\qquad\text{et}\qquad\int_0^{+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]^2\,\mathrm{d}x\ =\ 0.$$
Puisque $(f+f'+f'')^2$ est continue et positive, le nombre $J(f)$ est nul si et seulement si $f(0)+f'(0)=0$ et $f+f'+f''=0$. La résolution de cette équation différentielle donne :
$$f(x)=\alpha\,e^{-x/2}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\beta\,e^{-x/2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$
Et on a $f(0)=\alpha$ et $f'(0)=-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{2}$, donc $f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta\sqrt{3}\right)$.
Ainsi donc, J est minimale si et seulement si $J(f)=0$, ce qui a lieu si et seulement si :
$$f(x)=2\,\beta\,e^{-x/2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)=2\,\beta\,e^{-x/2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\right).$$

E) Une inégalité de Hardy et Littlewood

20°) Pour toute fonction continue $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ de carré intégrable, on pose :
$$\|f\|=\sqrt{\int_0^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$
Pour $f\in C^4(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables, on sait que $J(f)\geq 0$.
Si on pose $f_\mu(x)=f(\mu\,x)$ avec $\mu>0$, la fonction f_μ vérifie les mêmes propriétés et on a :
$$J(f_\mu)=\int_0^{+\infty}\left[(f(\mu\,x))^2-\mu^2(f'(\mu\,x))^2+\mu^4(f''(\mu\,x))^2\right]\mathrm{d}x\ \geq\ 0.$$
Avec $\mu>0$, ceci s'écrit encore, quitte à poser $t=\mu\,x$:
$$\mu\,J(f_\mu)=\ \|f\|^2-\mu^2\,\|f'\|^2+\mu^4\,\|f''\|^2\ \geq\ 0.$$
Ce trinôme du second degré en μ^2 étant à valeurs positives, on a :
$$\mu\,J(f_\mu)=\left(\mu^2\,\|f''\|-\frac{1}{2}\,\frac{\|f'\|^2}{\|f''\|}\right)^2+\frac{4\,\|f''\|^2\,\|f\|^2-\|f'\|^4}{4\,\|f''\|^2}\ \geq\ 0.$$

Quitte à faire $\mu=\|f'\|\big/\sqrt{2}\ \|f''\|$, on en déduit que $4\,\|f''\|^2\,\|f\|^2-\|f'\|^4\geq 0$, ou :
$$\|f'\|^2\ \leq\ 2\,\|f\|\,\|f''\|.$$

21°) Il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement s'il existe un réel μ pour lequel on a $J(f_\mu) = 0$, ce qui a lieu si et seulement s'il existe un réel λ tel que :

$$\forall\, x \geq 0, \quad f(\mu\, x) = \lambda\, e^{-x/2} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Ainsi donc, il y a égalité dans l'inégalité de Hardy-Littlewood si et seulement si :

$$\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \forall\, x \geq 0, \quad f(x) = \lambda\, e^{-x/2\,\mu} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2\,\mu} - \frac{\pi}{3}\right).$$
