

## Sur le calcul des variations

---

Soit un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , ni vide, ni réduit à un point, et un ensemble  $E$  de fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On se donne une application  $J : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie au moyen d'une intégrale faisant intervenir  $f$  et ses dérivées. L'objectif de ce problème est d'étudier le minimum éventuel de  $J$  sur  $E$  :

$$\min_{f \in E} J(f),$$

et de déterminer, dans certains cas particuliers, les points  $f$  de  $E$  en lesquels  $J$  atteint son minimum.

On note  $E_{a,b}^k$  l'ensemble des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  telles que  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$ . La notation  $y^{(k)}$  désigne la dérivée d'ordre  $k$  de la fonction  $y$ .

### A. Préliminaire

1) On pose  $j = \exp(2i\pi/3)$ . Que vaut  $j^4 + j^2 + 1$  ?

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes sur  $\mathbb{C}$  et on considère la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Proposer une matrice inversible  $U$  et une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$  telles que  $U^{-1}AU = D$ . La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.

3) En déduire les solutions  $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$  de l'équation différentielle

$$X' = AX. \quad (1)$$

4) Déterminer l'ensemble des solutions  $y : I \rightarrow \mathbb{C}$  de l'équation différentielle

$$y^{(4)} + y'' + y = 0 \quad (2)$$

et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On pourra considérer le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}.$$

## B. Un lemme de du Bois-Reymond

- 5) On considère la fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(t) = (1 - t^2)^3$  si  $|t| \leq 1$  et  $h(t) = 0$  sinon. Montrer que  $h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et représenter son graphe. La fonction  $h$  est-elle de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$  ?
- 6) Soit  $x_0, x_1$  des nombres réels tels que  $x_0 < x_1$ . Construire à partir de  $h$  une fonction  $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in ]x_0, x_1[$  et  $g(x) = 0$  ailleurs.
- 7) Soit  $F \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $\int_0^1 F(x)u(x) \, dx = 0$  pour tout  $u \in E_{0,0}^2$ . Démontrer qu'alors  $F$  est nulle.

## C. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend  $E = E_{a,b}^2$  pour un couple donné  $(a, b)$  de nombres réels. La fonction  $J$  est définie sur  $E$  par la formule

$$J(f) = \int_0^1 [P(f(x)) + Q(f'(x))] \, dx,$$

où  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  sont des polynômes fixés.

Soit  $f_0 \in E$ . On se propose de prouver que si  $J(f_0) \leq J(f)$  pour tout  $f \in E$ , alors  $f_0$  vérifie une certaine équation différentielle. Soit  $u \in E_{0,0}^2$ .

- 8) Montrer que l'application  $q$  définie sur  $\mathbb{R}$  par la formule

$$q(t) = J(f_0 + tu)$$

est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie  $(a_0, a_1, \dots, a_r)$  de nombres réels telle que  $q(t) = \sum_{k=0}^r a_k t^k$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Expliciter le coefficient  $a_1$  sous la forme d'une intégrale faisant intervenir les polynômes dérivés  $P'$  et  $Q'$ .

- 9) On suppose que pour tout  $f \in E$ ,  $J(f_0) \leq J(f)$ . Montrer qu'alors  $a_1 = 0$  et en déduire l'équation différentielle :

$$\forall x \in [0, 1], \quad P'(f_0(x)) = \frac{d}{dx} [Q'(f_0'(x))]. \quad (\Delta)$$

### Exemples

*Premier exemple.* On choisit  $E = E_{0,1}^2$  et  $J = J_1$  définie par  $J_1(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 \, dx$ .

- 10) Former l'équation différentielle  $(\Delta)$  correspondante. Parmi ses solutions, préciser celles qui appartiennent à  $E_{0,1}^2$ .
- 11) Montrer que  $J_1$  admet un minimum sur  $E_{0,1}^2$ , préciser sa valeur ainsi que les points de  $E_{0,1}^2$  où ce minimum est réalisé. (On pourra s'aider de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

*Deuxième exemple.* On choisit  $E = E_{0,0}^2$  et  $J = J_2$  définie par

$$J_2(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 + (f'(x))^3 dx.$$

- 12) Former l'équation différentielle  $(\Delta)$  correspondante. Parmi ses solutions, montrer que seule la fonction nulle appartient à  $E_{0,0}^2$ .
- 13) Montrer que  $J_2$  n'admet pas de minimum sur  $E_{0,0}^2$ . (On pourra se servir de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  par la formule  $f(x) = x^2(1 - x)$ .)

## D. Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie,  $E$  désigne l'ensemble des fonctions  $f \in C^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telles que  $f^2$  et  $(f'')^2$  soient intégrables sur  $\mathbb{R}_+$ . On rappelle que l'ensemble des fonctions  $g \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telles que  $g^2$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, que l'on note  $L^2$ .

Dans les deux questions suivantes, on considère  $f \in E$ .

- 14) Montrer que le produit  $ff''$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $f(x)f'(x)$  ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .
- 15) En déduire que  $f' \in L^2$ , puis que  $f(x)f'(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Dans cette partie, la fonction  $J$  est définie par

$$J(f) = \int_0^{+\infty} [(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2] dx.$$

Par un raisonnement identique à celui de la partie C, on peut montrer, et on l'admettra, que si la fonction  $J$  présente un minimum en un élément  $f$  de  $E$ , alors  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}_+$  de l'équation (2) :  $y^{(4)} + y'' + y = 0$ .

- 16) Déterminer les solutions de (2) qui appartiennent à  $E$ . (On pourra d'abord étudier leur appartenance à  $L^2$ .)

On note  $e_1$  et  $e_2$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  par les formules

$$e_1(t) = e^{-t/2} \cos\left(t \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad e_2(t) = e^{-t/2} \sin\left(t \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Un calcul montre, et on l'admettra, que pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,

$$J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2}.$$

On pose également, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\psi(t) = e^{-t/2} \sin\left(t \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

- 17) On suppose, dans cette question, que la fonction  $J$  présente un minimum en un élément  $f$  de  $E$ . Montrer que  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}_+$  de l'équation  $y'' + y' + y = 0$ . Montrer par ailleurs qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f = \lambda\psi$ .
- 18) Montrer que pour tout  $f \in E$  et tout réel  $A > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^A \left[ (f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2 \right] dx \\ &= \int_0^A [f(x) + f'(x) + f''(x)]^2 dx + (f(0) + f'(0))^2 - (f(A) + f'(A))^2. \end{aligned}$$

Quel est le comportement de  $(f(A) + f'(A))^2$  lorsque  $A \rightarrow +\infty$ ? En déduire que la fonction  $J$  admet effectivement un minimum au point  $\lambda\psi$  pour chaque  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- 19) Indiquer comment le point de vue de la question précédente permet de retrouver directement toutes les fonctions  $f_0 \in E$  telles que  $J(f_0) = \min_{f \in E} J(f)$ , sans passer par l'équation différentielle (2).

## E. Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la partie précédente, et pour tout  $g \in L^2$ , on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} (g(x))^2 dx}.$$

- 20) Montrer que pour tout  $f \in E$ ,

$$\|f'\|^2 \leq 2\|f\| \cdot \|f''\|.$$

On pourra poser  $f_\mu(x) = f(\mu x)$  et utiliser le fait que  $J(f_\mu) \geq 0$ , pour *tout* réel  $\mu > 0$ .

- 21) Déterminer tous les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

FIN DU PROBLÈME