Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

Q 1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'on peut en limiter l'étude à $\mathbb{R}_+$.

Q 2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q 3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Q 4. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Q 5. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Q 6.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{X(n^2 + X^2)}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(n^2 + x^2)}\,\mathrm{d}x$ et donner sa valeur.

c) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{2n^2}$.

Q 7. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2x}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note A_j la j-ème colonne de A et $S = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} A_j$.

À toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on associe la matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = S - A_k$.

Il est facile de montrer que l'application $u : A \mapsto B$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on ne demande pas de le faire.

Q 1. Dans cette question, $n = 2$. On note $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Donner la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.

b) Montrer que u est un automorphisme.

Q 2. Dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\det u(A)$ en fonction de $\det A$.

Q 3. Plus généralement, montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det u(A) = K_n \det A$, où K_n est une constante indépendante de A qu'on précisera.

Q 4. On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ remplie de 1 et $U_n = J_n - I_n$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $u(A)$ à l'aide de la matrice AU_n.

Q 5. Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Q 6. Il est connu que l'application $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

Justifier que u est un endomorphisme auto-adjoint.

Q 7. Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre $n - 1$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a_1 & \text{———} & a_1 \\ a_2 & \text{———} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \text{———} & a_n \end{pmatrix}$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Q 8. Donner alors le deuxième sous-espace propre.

Q 9. Calculer $\mathrm{tr}(u)$ et $\det(u)$.

Q 10. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $u^k(A)$ en fonction de A et $u(A)$.

Exercice 3

On cherche les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \int_0^x (x+t)f(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Q 1. Montrer que f est une solution si et seulement si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + xf(x) + 2\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

Q 2. On pose F la primitive de f qui s'annule en 0.

Montrer que f est solution si et seulement si $F'(0) = 1$ et F est une solution de l'équation différentielle $y''+xy'+2y = 0$. On note E cette équation différentielle.

Q 3. On suppose que E possède une solution h développable en série entière sur $\mathbb{R}$ telle que $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$.

On note $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{-1}{n+1} a_n$.

b) En déduire une expression de $h(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Q 4. Conclure l'exercice : donner les solutions du problème initial.

Q 5. Bonus : donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle E.

Exercice 4

Soit $p \in]0,1[$, $q = 1-p$ et X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

Q 1. Montrer que la variable $Y = \dfrac{1}{2^X}$ possède une espérance finie et la calculer en fonction de p.

Q 2. Montrer de même que Y possède une variance et la calculer.

Q 3. Sans chercher à la calculer, montrer que l'espérance de e^{-Y} est finie et est un réel compris entre 0 et 1 strictement, qu'on note M.

On considère maintenant une suite de variables aléatoires indépendantes (X_n) qui suivent toutes la même loi $\mathscr{G}(p)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{X_k}}$.

Q 4. Calculer l'espérance et la variance de S_n.

Q 5. Montrer que la variable aléatoire e^{-S_n} possède une espérance finie et la calculer en fonction de M.

Q 6. Soit a un réel strictement positif. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \leqslant a) \leqslant e^a M^n$ (on pourra utiliser l'inégalité de Markov).

Q 7. On pose L l'événement « la suite (S_n) diverge vers $+\infty$ ». Montrer que L est presque sûr.

Devoir surveillé 7 - sujet CCINP - E3A - Corrigé

Exercice

Q 1. Pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $n^2 + x^2 > 0$ donc $\dfrac{1}{n^2+x^2}$ existe.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{n^2+x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc d'après le th. de comparaison des séries à termes positifs (TCSTP), la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+x^2}$ converge.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Il est alors évident qu'elle est paire (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$), donc on peut limiter l'étude à $\mathbb{R}_+$.

Q 2. On pose $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2+x^2}$.

D'après la question précédente, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ geq1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

De plus, toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^2+x^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément.

D'après le th. de continuité sous le symbole $\sum$, f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n' : x \mapsto \dfrac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [0, a]$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{2a}{n^4}$ donc la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[0, a]$.

D'après le th. de dérivation sous le symbole $\sum$, f est donc de classe C^1 sur $[0, a]$. Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, f est donc de classe C^1 sur $[0, +\infty[= \displaystyle\bigcup_{a>0} [0, a]$.

Q 4. La question **Q 2** montre que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc d'après le th. de la double limite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Q 5. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1]$, donc d'après un th. d'interversion série-intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right]_{x=0}^{1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Q 6.

a) $\dfrac{1}{X(n^2+X^2)} = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{X} - \dfrac{X}{n^2+X^2}\right)$.

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(n^2+x^2)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $\dfrac{1}{x(n^2+x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x^3}$. Or $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par comparaison de fonctions positives, $x \mapsto \dfrac{1}{x(n^2+x^2)}$ l'est aussi.

Pour $A > 1$, $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{x(n^2+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\left(\int_0^A \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^A \frac{x}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{n^2}\left(\ln A - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+n^2)\right]_{x=1}^{A}\right)$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\ln \frac{A}{\sqrt{A^2+n^2}} + \frac{1}{2}\ln(n^2+1)\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2n^2}\ln(n^2+1).$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f_n(x)}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après ce qui précède.

De plus, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{f_n(x)}{x}\right| \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{f_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_1^{+\infty} \left|\frac{f_n(x)}{x}\right| \mathrm{d}x$ est convergente.

D'après l'autre théorème d'interversion série-intégrale, on en déduit que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{f_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{2n^2}$.

Q 7. Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+x^2}$ est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [n, n+1]$, $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2+x^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2+x^2}$.

En additionnant les inégalités de gauche pour n variant de 0 à $+\infty$, on obtient

$f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$.

La minoration est évidente.

Exercice

Q 1.

a) $u(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$. De même, $u(E_{2,1}) = E_{2,2}$, $u(E_{1,2}) = E_{1,1}$ et $u(E_{2,2}) = E_{2,1}$ donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Un simple calcul montre que $\det(u) = 1 \neq 0$ donc u est un automorphisme.

Q 2. Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors $u(A) = \begin{pmatrix} -c & -a \\ -d & -b \end{pmatrix}$ donc $\det u(A) = bc - ad = -\det(A)$.

Si $A = [A_1, A_2, A_3]$ (écriture en colonne), alors $u(A) = [-A_2 - A_3, -A_1 - A_3, -A_2 - A_1]$ donc $\det u(A) = (-1)^3 \det[A_2 + A_3, A_1 + A_3, A_2 + A_1]$ (par trilinéarité du déterminant), donc

$\det u(A) = -\det[A_2, A_1+A_3, A_2+A_1] - \det[A_3, A_1+A_3, A_2+A_1]$ (par linéarité par rapport à la première colonne)

puis

$$\det u(A) = -\det[A_2, A_1, A_2 + A_1] - \det[A_2, A_3, A_2 + A_1] - \det[A_3, A_1, A_2 + A_1] - \det[A_3, A_3, A_2 + A_1]$$

or les colonnes du premier déterminant sont liées, ainsi que celles du quatrième, donc il vient

$$\begin{aligned} \det u(A) &= -\det[A_2, A_3, A_2 + A_1] - \det[A_3, A_1, A_2 + A_1] \\ &= -\det[A_2, A_3, A_2] - \det[A_2, A_3, A_1] - \det[A_3, A_1, A_2] - \det[A_3, A_1, A_1] \\ &= -\det[A_2, A_3, A_1] - \det[A_3, A_1, A_2] = -2\det[A_1, A_2, A_3] = -2\det A \end{aligned}$$

Q 3. Avec la même notation, $\det u(A) = \det[S - A_1, S - A_2, \dots, S - A_n] = \det[nS - S, S - A_2, \dots, S - A_n]$ en effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \ldots + C_n$

donc $\det u(A) = (n-1)\det[S, S - A_2, \dots, S - A_n] = (n-1)\det[S, -A_2, \dots, -A_n]$ (par op. $C_j \leftarrow C_j - C_1$)

donc

$$\begin{aligned} \det u(A) &= (-1)^{n-1}(n-1)\det[S, A_2, \dots, A_n] \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\det[A_1, A_2, \dots, A_n] \quad (\text{par op. } C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - \ldots - C_n) \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\det A \end{aligned}$$

Q 4. Simple calcul : $U(A) = A\,U_n$.

Q 5. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $u^2(A) = A\,U_n^2 = A((n-1)I_n + (n-2)U_n) = (n-1)A + (n-2)u(A)$

donc $u^2(A) - (n-2)u(A) - (n-1)A = 0$.

Ceci prouve que le polynôme $X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est annulateur de u.

Q 6. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Alors $\langle u(A), B\rangle = \operatorname{tr}((AU_n)^\top B) = \operatorname{tr}(U_n^\top A^\top B) = \operatorname{tr}(U_n A^\top B) = \operatorname{tr}(A^\top B U_n) = \langle A, u(B)\rangle$.

Donc u est un endomorphisme auto-adjoint.

Q 7. Soit A un élément du sous-espace propre $\mathrm{sep}(u, n-1)$. Alors $U(A) = [S - A_1, \ldots, S - A_n] = (n-1)[A_1, \ldots, A_n]$.

Donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $S - A_j = (n-1)A_j$, *i.e.* $A_j = \dfrac{1}{n}S$: toutes les colonnes de A sont donc égales, donc A est de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & \text{—} & a_1 \\ a_2 & \text{—} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \text{—} & a_n \end{pmatrix}$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Réciproquement, si A est de cette forme, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $S = nA_1 = \ldots = nA_n$ donc $u(A) = (n-1)A$.

Ceci conclut la réponse.

Q 8. Comme u est auto-adjoint, les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux. D'après le calcul du polynôme annulateur, on en déduit que la deuxième valeur propre est -1, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est l'orthogonal du précédent.

Q 9. Le premier sous-espace propre $\mathrm{sep}(u, n-1)$ est de dimension n, donc le second $\mathrm{sep}(u, -1)$ est de dimension $n^2 - n$. Or u est diagonalisable, puisqu'il est auto-adjoint, donc

$\mathrm{tr}(u) = n \times (n-1) + (n^2 - n) \times (-1) = 0$ et $\det u = n^{n-1} \times (-1)^{n^2-n} = n^{n-1}$ (car $n^2 - n = n(n-1)$ est toujours pair).

Q 10. Pour $k \in, \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^k par $P = X^2 - (n-2)X - (n-1)$, le polynôme annulateur de u trouvé précédemment :

$X^k = PQ + aX + b$ et P s'annule en $n-1$ et en -1 donc $(n-1)^k = a(n-1) + b$ et $(-1)^k = -a + b$, donc $a = \dfrac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}$ et $b = (-1)^k + a$.

Donc $u^k = au + b\mathrm{Id}_E$, *i.e.* $u^k(A) = \dfrac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} u(A) + \dfrac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n} A$.

Exercice

Q 1. On effectue le changement de variables $u = x - t$ (donc $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$) :

$$\int_0^x (x+t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_x^0 (2x - u)f(u) \times (-\,\mathrm{d}u) = 2x \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$$

Donc si f est solution, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$, donc en évaluant en 0, on a $f(0) = 1$,

or comme f est continue, les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$ sont dérivables, donc f l'est aussi et en dérivant, on obtient

$$f'(x) = -2\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - 2xf(x) + xf(x) = -2\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - xf(x)$$

Réciproquement, si f est dérivable, $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + xf(x) + 2\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0$, alors

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -xf(x) - 2\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$, donc en intégrant, on obtient $f(x) - f(0) = -2x\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$,

i.e. $f(x) = 1 - 2x\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u = 1 - \int_0^x (x+t)f(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Q 2. $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$ donc les conditions précédentes deviennent $F'(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad F''(x) = -xF'(x) - 2F(x)$, d'où l'équivalence demandée.

Q 3.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donc d'après le cours sur les séries entières, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ et $h''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$,

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

Par unicité du dév. en série entière, on peut identifier les coefficients : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+2)a_n = 0$, *i.e.* $a_{n+2} = \dfrac{-1}{n+1}a_n$.

De plus, comme $h(0) = a_0$ et $h'(0) = a_1$, on en déduit $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

b) Par une récurrence simple, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)\times(2(n-1))\times\ldots\times 2} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-x^2)^n = xe^{-x^2/2}$.

Q 4. On constate que la fonction $F : x \mapsto x\,e^{-x^2/2}$ vérifie les conditions de la question **Q 2**, donc sa dérivée $f : x \mapsto (1-x^2)e^{-x^2/2}$ est solution du problème d'après **Q 1**.

Réciproquement, si f est solution, alors F est solution de E et vérifie la double condition $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$. L'équation peut se mettre sous la forme $y'' = -xy' - 2y$ et les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc d'après le th. de Cauchy-Lipschitz, il n'existe qu'une seule solution de E à ce problème de Cauchy, qui est h. Donc la seule solution du problème initial est h'.

Q 5. La recherche des solutions développables en série entière de E montre que celles-ci forment un espace de dimension 2 : $x \mapsto a_0\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n+1}$ (le rayon de convergence est clairement $+\infty$).

Donc toutes les solutions de E sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Q 1. X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc Y est à valeurs dans $[0,1]$: elle est donc bornée, donc admet une espérance finie.

D'après le th. de transfert, on a alors

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}pq^{k-1} = \frac{p}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{q}{2}\right)^{k-1} = \frac{p}{2}\times\frac{1}{1-\frac{q}{2}} = \frac{p}{2-q} = \frac{p}{1+p}$$

Q 2. De même, Y étant bornée, elle admet des moments à tout ordre, donc une variance. D'après la formule de Huyghens et le th. de transfert,

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4^k}\mathbb{P}(X=k) - \left(\frac{p}{1+p}\right)^2 = \frac{p}{3+p} - \left(\frac{p}{1+p}\right)^2 = \frac{1-p}{(1+p)^2}$$

Q 3. De même, e^{-Y} est à valeurs dans $[0,1]$ donc elle admet une espérance finie. Et toujours par le th. de transfert, comme $e^{-t} < 1$ quand $t > 0$,

$$0 < \mathbb{E}(e^{-Y}) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-1/2^k}pq^{k-1} < \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} = 1$$

Q 4. Je note $Y_k = \dfrac{1}{2^{X_k}}$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k) = n\mathbb{E}(Y)$ par équidistribution, donc $\mathbb{E}(S_n) = n\dfrac{p}{1+p}$.

De plus, comme les variables $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes, les variables $Y_1,\ldots,Y_n$ le sont aussi, donc $\mathbb{V}(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(Y_k) = n\mathbb{V}(Y) = n\frac{1-p}{(1+p)^2}$.

Q 5. $e^{-S_n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{-Y_k}$ donc par indépendance, $\mathbb{E}(e^{-S_n}) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(e^{-Y_k}) = M^n$ par équidistribution.

Q 6. $S_n \leqslant a \iff -S_n \geqslant -a \iff e^{-S_n} \geqslant e^{-a}$ donc $\mathbb{P}(S_n \leqslant a) = \mathbb{P}(e^{-S_n} \geqslant e^{-a}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{-S_n})}{e^{-a}}$ d'après l'inégalité de Markov.

Donc d'après ce qui précède, $\mathbb{P}(S_n \leqslant a) \leqslant e^a M^n$.

Q 7. La suite (S_n) est clairement strictement croissante, donc soit elle diverge vers $+\infty$, soit elle est majorée (th. de la limite monotone) et on peut ajouter la condition « par un entier ».

Autrement dit, la suite (S_n) ne diverge pas vers $+\infty$ signifie $\exists A \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leqslant A$.

C'est-à-dire $\bar{L} = \bigcup\limits_{A \in \mathbb{N}^*} \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \{S_n \leqslant A\}$.

Pour $A \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $U_n = \{S_n \leqslant A\}$: la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} U_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U_n)$ d'après la propriété de continuité décroissante.

Or $\mathbb{P}(U_n) \leqslant e^A M^n$ et $M \in [0, 1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U_n) = 0$, donc $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} U_n) = 0$.

Donc $\bar{L}$ est une réunion dénombrable d'événements négligeables donc $\mathbb{P}(\bar{L}) = 0$, donc $\mathbb{P}(L) = 1$.