L'usage des calculatrices est interdit

Rappelez-vous tout ce qui a été dit lors de la correction du DS précédent ! N'oubliez pas que le concepteur du sujet est votre ami, mais pas le correcteur ! Lisez donc l'énoncé attentivement, vérifiez la cohérence de vos résultats à l'aide de l'énoncé et rédigez soigneusement sans vouloir tout faire et sans étourderie.

Exercice

Soit $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$ et $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrez que $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos u}\,\mathrm{d}u = \ln(3+2\sqrt{2})$ en effectuant le changement de variables $v = \sin u$.

b) Écrivez $2B-A$ comme une intégrale et faites le changement de variables $t = 1-x$. Que constatez-vous ? Déduisez-en une relation simple entre A et B.

c) On peut donc se contenter de calculer A. En faisant un changement de variable que vous choisirez judicieusement, montrez que $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin t\cos t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$.

d) Déterminez deux réels λ et ϕ tels que $\cos t + \sin t = \lambda\cos(\phi - t)$.

e) En effectuant un deuxième changement de variable, montrez que $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(2u)}{\cos(u)}\,\mathrm{d}u$.

f) Concluez : donnez la valeur de A et B.

Problème 1 - Étude d'une fonction

On définit la fonction f en posant $f(x) = \sqrt{x^2+x-\ln|1+x|}$.

On note aussi $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ et on rappelle que $0,6 < \ln 2 < 0,7$.

Question 1) On note $u : x \mapsto \ln|1+x|$, définie et dérivable sur D. Justifiez que pour tout $x \in D$, $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Question 2) Montrez que la fonction $\varphi : x \mapsto x^2 + x - \ln|1+x|$ est positive sur D. Précisez les points où elle s'annule et l'ensemble de définition de f.

Question 3)

a) Sur quel ensemble est-on sûr que f est dérivable ? Justifiez soigneusement votre réponse, bien entendu.

b) Calculez le dév. limité de φ en 0 à l'ordre 2. Déduisez-en la dérivabilité ou non de f en 0.

Question 4)

a) Justifiez que $\ln(1+x) \ll x$ quand x tend vers $+\infty$ et donnez un équivalent simple de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Dressez le tableau de variations de f avec les limites.

Question 5) Montrez que la courbe de f possède pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$.

Question 6) Menez de même l'étude de la branche infinie de la courbe de f en $-\infty$.

Question 7) Montrez que la courbe de f coupe chacune de ses asymptotes obliques une seule fois aux points d'abscisse $-1-\mathrm{e}^{-1/4}$ et $-1+\mathrm{e}^{-1/4}$.

Question 8) Donnez l'allure de la courbe de f : en particulier, vous préciserez la position du point d'abscisse $\dfrac{-3}{2}$ par rapport à la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$.

Devoir surveillé 4 - 2 heures - Corrigé

Exercice

a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos u}\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-v^2}\,\mathrm{d}v.$

On décompose la fraction $\dfrac{1}{1-v^2}$ en éléments simples, on trouve finalement $\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, qui se réécrit $\ln(3+2\sqrt{2})$ en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur.

b) On écrit $2B - A = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$, on effectue le changement de variables, on trouve $2B - A = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-2t}{\sqrt{1-t}+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = A - 2B$, donc $2B - A = 0$,donc $A = 2B$.

c) Changement de variables $x = \sin^2 t$ (donc $\mathrm{d}x = 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$).

d) Transformation amplitude-phase : $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right)$

e) À partir de l'intégrale calculée dans la question c, on effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{4} - u$:
le dénominateur devient $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos u$ (question précédente) et le numérateur
$2\cos t\sin t = \sin(2t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2u\right) = \cos(2u)$.

f) $\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$ donc $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{2\cos^2 u - 1}{\cos(u)}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos u\,\mathrm{d}u - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{\cos(u)}\,\mathrm{d}u$

Donc $A = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2})$. Et $B = \dfrac{A}{2}$.

Problème 1

Question 1) C'est du cours : sur $]-1,+\infty[$, u est la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, qui a pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$; sur sur $]-\infty,-1[$, u est la fonction $x \mapsto \ln(-1-x)$, qui a pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{-1-x}$ (dérivation d'une composée), c'est-à-dire $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Question 2) φ est définie et dérivable sur D comme somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in D$, $\varphi'(x) = 2x + 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x(2x+3)}{x+1}$. Un tableau de signes donne rapidement le signe de $\varphi'(x)$: $\varphi'(x) > 0 \iff x \in \left]\dfrac{-3}{2}, -1\right[\cup]0,+\infty[$.

On en déduit facilement le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		↘	>0	↗	‖	↘	0	↗	

$\varphi(-3/2) = \dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{2} - \ln\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} + \ln 2 > 0.$

L'étude montre que φ est strictement positive sur $]-\infty,-1[$ et positive ou nulle sur $]-1,+\infty[$, avec annulation uniquement en 0.

On a montré que pour tout $x \in D$, $\varphi(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. Donc f est définie sur D.

Question 3)

a) La fonction φ est dérivable sur $]-\infty, -1[$ (somme de fonctions dérivables) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le th. de composition des fonctions dérivables, f est dérivable sur $]-\infty, -1[$. De même sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On est donc sûr que f est dérivable sur $D - \{0\}$.

b) Comme on veut calculer le d.l. de φ en 0, on se place sur $]-1, +\infty[$: pour $x > -1$, $\varphi(x) = x^2 - x - \ln(1+x)$.

On sait que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ quand x tend vers 0, donc $\varphi(x) = x^2 + x - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, autrement dit $\varphi(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + o(x^2)$.

Or $f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$ et $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3}{2}x^2$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{2}}|x|$.

Pour $x \neq 0$, on a donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\dfrac{|x|}{x}$, donc quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

f est donc dérivable à droite et à gauche en 0, mais les dérivées à droite et à gauche en 0 sont différentes, donc f n'est pas dérivable en 0.

Question 4)

a) Quand x tend vers $+\infty$, $1 + x \sim x$ et x tend vers $+\infty$ donc $\ln(1+x) \sim \ln x$, or on sait que $\ln x \ll x$ (croissance comparée), donc on a $\ln(1+x) \ll x \ll x^2$, donc finalement, $\varphi(x) \sim x^2$. Comme on fait tendre x vers $+\infty$, x est positif donc $f(x) \sim \sqrt{x^2} = x$.

Quand x tend vers $-\infty$, c'est la même chose : $\ln|1+x| \sim \ln|x| \ll x \ll x^2$, donc $f(x) \sim -x$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{2f(x)}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\varphi'(x)$. On déduit le tableau de variations suivant de l'étude menée dans la question 1 :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	> 0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

les limites en l'infini se déduisant des équivalents précédents et les limites en -1 étant évidentes (pas de forme indéterminée).

Question 5) On a dit juste avant que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Pour $x > 0$, on peut écrire $f(x) - x = x\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}} - 1\right)$.

On pose $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$: u tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et on sait que $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}u$, donc par le th. de substitution dans les équivalents, on en déduit que $\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$, car $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^2} \ll \dfrac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Donc $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} x\dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Donc $f(x) - x$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$.

La courbe de f possède donc une asymptote d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ en $+\infty$.

Question 6) On fait la même chose, mais on n'oublie pas que quand $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$!

On sait que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -x$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

Pour $x < 0$, on peut écrire $f(x) + x = -x\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln|1+x|}{x^2}} - 1\right)$, donc le même raisonnement montre que $f(x) + x$ a pour limite $\dfrac{-1}{2}$ quand x tend vers $-\infty$.

La courbe de f possède donc une asymptote d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ en $-\infty$.

Question 7) On résout d'abord l'équation $f(x) = x + \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{x^2+x-\ln|1+x|} = x + \frac{1}{2} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+x-\ln|1+x| & = & \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \\ & \text{et} & \\ x+\frac{1}{2} & > & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -\ln|1+x| & = & \frac{1}{4} \\ & \text{et} & \\ x+\frac{1}{2} & > & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \ln(1+x) & = & \frac{-1}{4} \\ & \text{et} & \\ x+\frac{1}{2} & > & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1+x & = & \mathrm{e}^{-1/4} \\ & \text{et} & \\ x+\frac{1}{2} & > & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+e^{-1/4} \\ \text{et} & & \\ x & > & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Il reste à vérifier si $-1+\mathrm{e}^{-1/4} > \frac{-1}{2}$, ce qui peut être fait par équivalences :

$$-1+\mathrm{e}^{-1/4} > \frac{-1}{2} \iff \mathrm{e}^{-1/4} > \frac{1}{2} \iff \frac{-1}{4} > \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \iff \frac{1}{4} < \ln 2$$

Or l'inégalité finale est vraie ($\ln 2 > 0,6$) donc la première l'est aussi.

Conclusion : la courbe de f coupe une seule fois l'asymptote en $+\infty$ au point d'abscisse $-1+e^{-1/4}$.

On résout de même l'équation $f(x) = -x - \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{x^2+x-\ln|1+x|} = -x - \frac{1}{2} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+x-\ln|1+x| & = & \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \\ & \text{et} & \\ x+\frac{1}{2} & < & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -\ln|1+x| & = & \frac{1}{4} \\ & \text{et} & \\ x+\frac{1}{2} & < & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \ln|1+x| & = & \frac{-1}{4} \\ & \text{et} & \\ x+\frac{1}{2} & < & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} |1+x| & = & \mathrm{e}^{-1/4} \\ & \text{et} & \\ x+\frac{1}{2} & < & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x=-1+e^{-1/4} \quad \text{ou} \quad x=-1-e^{-1/4} \\ \text{et} \\ x < -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

La première des deux possibilités n'est pas solution (elle est solution du système précédent). Et il est évident que $-1-\mathrm{e}^{-1/4} < \frac{-1}{2}$.

Conclusion : la courbe de f coupe une seule fois l'asymptote en $-\infty$ au point d'abscisse $-1-e^{-1/4}$.

Question 8) $f(\frac{-3}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}+\ln 2} > \sqrt{0,75+0,6} > 1$ donc le point d'abscisse $\frac{-3}{2}$ est au-dessus de l'asymptote d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$.