On lance une pièce donnant *pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle k-chaîne toute suite maximale de *pile* consécutifs, maximale signifiant qu'une telle suite ne peut être prolongée. Par exemple, si un tirage donne $face, face, pile, pile, pile, face, pile$, alors dans cette suite de 7 lancers, il y a une 3-chaîne, puis une 1-chaîne, mais pas de 2-chaîne.

Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $C_{n,k}$ la variable aléatoire qui donne le nombre de k-chaînes incluses dans les n premiers lancers. Dans l'exemple précédent, $C_{7,3} = 1$ et $C_{7,2} = 0$.

Q 1. Donner les lois des variables $C_{n,n}$ et $C_{n,n-1}$.

Q 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de k a-t-on $C_{n,k}(\Omega) = \{0,1\}$? Donner dans ce cas la loi de $C_{n,k}$.

Q 3. Pour $(n,k,i) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $k \leqslant n-1$ et $i \leqslant n$, on note $X_{n,k,i}$ la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si une k-chaîne incluse dans les n premiers lancers commence au rang i. Quel lien y-a-t-il entre $C_{n,k}$ et les variables $X_{n,k,i}$? En déduire $\mathbf{E}(C_{n,k})$, puis un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Q 4. On pose S_n le nombre de chaînes de *pile* de n'importe quelle longueur incluses dans les n premiers lancers. Calculer $\mathbf{E}(S_n)$.

Q 5. Dans une suite de lancers, on appelle changement tout indice $i \geqslant 2$ tel que les lancers de rangs i et $i-1$ soient différents. On note X_n le nombre de changements parmi les n premiers lancers. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$.

Exercice hebdomadaire 16 - Corrigé

Q 1. On note P_k l'événement « on obtient *pile* au k-ème lancer ». On suppose bien entendu que les événements $(P_k)_{k\geqslant 1}$ sont mutuellement indépendants.

Il est clair que la seule n-chaîne incluse dans les n premiers lancers est la suite de n *pile* consécutifs, donc $C_{n,n}$ est une variable de Bernoulli de paramètre p^n, car $\{C_{n,n}=1\}=P_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_n$.

De même, il ne peut y avoir qu'une seule $(n-1)$-chaîne incluse incluse dans les n premiers lancers, qui sont alors $face, pile, \ldots, pile$ et $pile, \ldots, pile, face$.
Donc $C_{n,n-1}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $2qp^{n-1}$, car $\{C_{n,n-1}=1\}=(\overline{P_1}\cap P_2\cap\ldots\cap P_n)\sqcup(P_1\cap\ldots\cap P_{n-1}\cap\overline{P_n})$.

Q 2. Pour qu'il puisse y avoir au moins 2 k-chaînes, il faut que $2k+1\leqslant n$ (entre les deux chaînes, il y au moins une *face*). Donc si $2k+1>n$, alors il y a au plus une seule k-chaîne. Et réciproquement, si $2k+1\leqslant n$, on peut placer deux k-chaînes, par exemple avec la suite des k premiers lancers *pile*, suivis d'un *face*, suivi de nouveau de k *pile*.

On a donc l'équivalence : $C_{n,k}(\Omega)=\{0,1\}$ si et s.si $2k+1>n$, *i.e.* $k>\dfrac{n-1}{2}$.

De plus, dans ce cas,

$$\{C_{n,k}=1\}=(P_1\cap\ldots\cap P_k\cap\overline{P_{k+1}})\sqcup\left[\bigsqcup_{j=2}^{n-k}(\overline{P_{j-1}}\cap P_j\cap\ldots\cap P_{k+j-1}\cap\overline{P_{k+j}})\right]\sqcup(\overline{P_{n-k}}\cap P_{n-k+1}\cap\ldots\cap P_n)$$

donc $\mathbb{P}(C_{n,k}=1)=p^kq+\displaystyle\sum_{j=2}^{n-k}p^kq^2+p^kq=2p^kq+(n-k-1)p^kq^2$.

Q 3. $C_{n,k}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1}X_{n,k,i}$, car le nombre de k-chaînes est le nombre de points de départ de telles chaînes. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(C_{n,k})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1}\mathbf{E}(X_{n,k,i})$.

Pour $k\leqslant n-1$,

— $\{X_{n,k,1}=1\}=(P_1\cap\ldots\cap P_k\cap\overline{P_{k+1}})$ donc $\mathbf{E}(X_{n,k,1})=p^kq$

— pour $i\in[\![2,n-k]\!]$, $\{X_{n,k,i}=1\}=\overline{P_{i-1}}\cap P_i\cap\ldots\cap P_{k+i-1}\cap\overline{P_{k+i}}$, donc $\mathbf{E}(X_{n,k,i})=p^kq^2$

— $\{X_{n,k,n-k+1}=1\}=(\overline{P_{n-k}}\cap P_{n-k+1}\cap\ldots\cap P_n)$ donc $\mathbf{E}(X_{n,k,n-k+1})=p^kq$

donc $\mathbf{E}(C_{n,k})=2p^kq+(n-k-1)p^kq^2$. Donc quand n tend vers $+\infty$, $\mathbf{E}(C_{n,k})\sim np^kq^2$.

Q 4. $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}C_{n,k}$ donc $\mathbf{E}(S_n)=p^n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2p^kq+(n-k-1)p^kq^2)=p^n+(2q+(n-1)q^2)\sum_{k=1}^{n-1}p^k-q^2p\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1}$.

La première somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}p^k$ est bien connue : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}p^k=p\frac{1-p^{n-1}}{1-p}=\frac{p}{q}(1-p^{n-1})$. La seconde $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1}$ se calcule par dérivation de $x\mapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{1-x^n}{1-x}$ et évaluation en p (je ne détaille pas) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1}=\frac{1}{q^2}(1+(n-1)p^n-np^{n-1})$.

Il vient alors $\mathbf{E}(S_n)=(n-1)pq+p$.

Q 5. On pose de même S'_n le nombre de chaînes de $face$ incluses dans les n premiers lancers et par symétrie des rôles de *pile* et $face$, on trouve que $\mathbf{E}(S'n)=(n-1)qp+q$ aussi. Donc le nombre total de chaînes de *pile* ou de $face$ est $T_n=S_n+S'_n$, d'espérance $2(n-1)pq+1$.

Or le nombre de changements est $X_n=T_n-1$: à chaque nouvelle chaîne après la première est associé un changement. Donc $\mathbf{E}(X_n)=2(n-1)pq$.