FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

Dans tout ce chapitre, E, F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies.

****1)** Montrez que les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}^2$:

a) $(x,y)\mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ b) $(x,y)\mapsto \dfrac{\sin x.\sin y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}$ c) $(x,y)\mapsto \dfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$

d) $(x,y)\mapsto \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$ e) $(x,y)\mapsto \dfrac{\sin x-\sin y}{e^x-e^y}$

****2)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrez que $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{si } x=y\end{cases}$ est continue.

****3)** Dans $E=\mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P)=\displaystyle\int_0^1 P(t)^3\,\mathrm{d}t$. Montrez que f est différentiable et donnez sa différentielle. Est-elle de classe C^1 ?

****4)** Soit $n\geqslant 2$. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique, on note $(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coordonnées génériques d'une matrice X.

a) Démontrez que l'application déterminant est de classe C^∞ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, donnez la valeur de $\dfrac{\partial\det}{\partial x_{i,j}}(I_n)$

c) Déduisez-en l'expression de la différentielle de det en I_n.

d) Démontrez que si A est inversible, alors $\mathrm{d}(\det)(A).H=\mathrm{tr}((\mathrm{com}\,A)^\mathsf{T}H)$.

e) Démontrez que la formule précédente reste valide pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

****5)** Soit $f:E\to F$ différentiable sur E et telle que pour tout $(\lambda,x)\in\mathbb{R}\times E$, $f(\lambda x)=\lambda f(x)$.
Montrez que f est linéaire.

****6)** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculez les différentielles des applications suivantes :

a) $(x,y)\mapsto f(y,x)$ b) $x\mapsto f(x,x)$ c) $(x,y)\mapsto f(y,f(x,x))$

****7)** Les fonctions suivantes sont-elles de classe C^1 ?

a) $(x,y)\mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ prolongée en $(0,0)$ par 0 b) $(x,y)\mapsto \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ prolongée en $(0,0)$ par 0

c) $(x,y)\mapsto \dfrac{y^4}{x^2+y^2}$ prolongée en $(0,0)$ par 0 d) $(x,y)\mapsto \dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}$ prolongée en $(0,0)$ par 0

e) $(x,y)\mapsto (x^2+y^2)^x$ prolongée en $(0,0)$ par 1

****8)** Résolvez les équations différentielles suivantes en utilisant le changement de variables indiqué (les fonctions sont supposées de classe C^1) :

a) $3\dfrac{\partial f}{\partial x}-2\dfrac{\partial f}{\partial y}=x$ en posant $u=x+y$, $v=2x+3y$

b) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ en polaires : $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r>0, -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

c) $x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ en polaires

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=f$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant $u=x+y$, $v=x-y$

e) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}-2f=-x$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$

f) $\dfrac{\partial f}{\partial x}+2x\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant $x=u$, $y=v+u^2$

g) $2x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ en posant $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y^2}$

h) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=xf$ sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ en posant $x=\dfrac{v}{u}$, $y=\dfrac{v}{u^2}$

****9)** Soit U un ouvert connexe par arcs et $f : U \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in U^2$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|^2$. Démontrez que f est constante.

****10)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est r-homogène quand $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \forall t > 0\quad f(tx, ty) = t^r f(x, y)$.

a) Montrez que si f est r-homogène, alors ses dérivées partielles sont $(r-1)$-homogènes.

b) Montrez que f est r-homogène si et s.si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = rf(x, y)$

c) On suppose f r-homogène et de classe C^2. Montrez

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = r(r-1)f(x, y)$$

****11)** Résolvez les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant le changement de variable indiqué (les fonctions sont supposées de classe C^2) :

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y > 0, x - y > 0\}$ en posant $u = x + y, v = x - y$

b) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en posant $x = u, y = uv$.

****12)** Déterminez les extréma des fonctions suivantes :

a) $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$

b) $(x, y) \mapsto (x - y)e^{xy}$

c) $(x, y) \mapsto e^{x \sin y}$

d) $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

e) $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{-x}$

f) $(x, y) \mapsto y(x^2 + (\ln y)^2))$

g) $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 - e^x$

h) $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{2x} + xy - y^2$

****13)** Déterminez les extréma des fonctions suivantes sur les ensembles indiqués :

a) $(x, y) \mapsto x^2 - 2x + xy + y^2$ sur $[0, 2] \times [-1, 0]$

b) $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ sur la boule-unité (pour la norme euclidienne)

c) $(x, y) \mapsto \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$ sur la boule-unité (pour la norme euclidienne)

****14)** Déterminez les triangles d'aires maximales inscrits dans un cercle donné.

***15)** Soient $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 13\}$:

a) Montrez que f admet un minimum et un maximum sur C.

b) On suppose que la restriction de f à C admet un extremum en (u, v).

$\triangleright$ Montrer, via un théorème du cours, qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} 4u + 6v &= du \\ 6u - v &= dv. \end{cases}$

$\triangleright$ En déduire que $(d - 4)(d + 1) - 36 = 0$, puis donner les valeurs possibles de (u, v).

c) Déterminer le minimum et le maximum de f sur C.

****16)** Déterminez les extréma de $f : (x, y) \mapsto x - y$ sous la contrainte $x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

****17)** Étudiez les extréma de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \exp(axy)$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ (a est un réel strictement positif fixé).

****18)** Déterminez les extréma de $f : (x, y) \mapsto xy$ sous la contrainte $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3}$.

****19)** Déterminez les extréma de $f : (x, y, z) \mapsto xyz$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.