

## Problème 1 - Fonction de Bessel

On définit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) \, dt.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) \, dt.$$

**Q 1.** Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 2.** Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et donner des expressions sous forme d'intégrales de  $f'(x)$  et  $f''(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Q 3.** Soit une fonction  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t)).$$

Déterminer  $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$  pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ .

**Q 4.** En déduire que  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0. \quad (\mathbf{E})$$

**Q 5.** On suppose qu'il existe une solution de **(E)** développable en série entière notée  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

Montrer que  $a_1 = 0$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

**Q 6.** En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de  $f$  en fonction des termes de la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Q 7.** Déduire des questions précédentes que  $f$  est l'unique solution développable en série entière de **(E)** vérifiant  $f(0) = \pi$ .

**Q 8.** En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $W_n$  en fonction de  $n$ .

## Problème 2 - Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial  $t = 0$  est  $k = 0$ . À chaque instant  $t \in \mathbb{N}^*$ , elle se déplace aléatoirement de sa position  $k \in \mathbb{Z}$  à la position  $k + 1$  ou  $k - 1$ .

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On définit sur un espace probabilisé  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  une suite de variables aléatoires  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  indépendantes et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $X_t$  modélise le déplacement de la particule à l'instant  $t$ .

Si  $X_t = 1$ , la particule se déplace vers la droite. Si  $X_t = -1$ , la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n$  modélise la position de la particule après  $n$  déplacements.

### I. Un développement en série entière

**Q 1.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence. Remarque : si un symbole  $\binom{?}{?}$  est utilisé avec l'un des deux paramètres non entier, il devra être explicité, sans quoi le résultat ne sera pas pris en compte.

**Q 2.** En déduire que pour tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

## II. Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathbb{P}(S_n = 0).$$

**Q 3.** Pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $\frac{X_t + 1}{2}$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $\sum_{t=1}^n \frac{X_t + 1}{2}$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

**Q 4.** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} (p(1-p))^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Q 5.** Déterminer la limite de la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  selon les valeurs de  $p$  et interpréter le résultat.

## III. Nombre de passages par l'origine

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $O_{2j}$  la variable aléatoire égale à  $\begin{cases} 1 & \text{si la particule est à l'origine à l'instant } t = 2j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n = \sum_{j=0}^n O_{2j}$ . On note  $\mathbb{E}(T_n)$  l'espérance de la variable aléatoire  $T_n$ .

Dans cette partie, on souhaite déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ .

**Q 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Que modélise la variable aléatoire  $T_n$  ?

**Q 7.** Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire  $O_{2j}$ . En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j.$$

**Q 8.** On suppose dans cette question que  $p \neq \frac{1}{2}$ . En utilisant le résultat de **Q 2**, calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$  et interpréter le résultat.

**Q 9.** On suppose dans cette question que  $p = \frac{1}{2}$ . Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ .

## Problème 3 - Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On s'intéresse ici à la convergence des suites matricielles  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  avec  $p = 1$  (matrices colonnes) ou  $p = n$  (matrices carrées). Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note alors  $M_k = \left( m_{i,j}^{(k)} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$  ou plus simplement  $M_k = \left( m_{i,j}^{(k)} \right)$ .

On suppose que l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  est muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$  indifféremment des valeurs de  $n$  et  $p$ . En particulier, si  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ,  $V$  est une matrice colonne assimilée à un vecteur de  $\mathbb{C}^n$  et on note  $\|V\|$  sa norme.

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées  $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'une matrice donnée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

## I. Limite des puissances d'une matrice

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$  muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$ . On note sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où  $\text{Sp}(u)$  est l'ensemble des valeurs propres de  $u$ . On note  $A$  la matrice de l'endomorphisme  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'objectif de cette partie est de montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

On suppose (sauf en **Q 5**) que  $A = T$  où  $T$  est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Q 1.** Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$  et en déduire  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_1)$ .

Soit  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1; i \rrbracket$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_j) = 0$ .

**Q 2.** Montrer qu'il existe  $x \in \text{vect}(e_j)_{j \in \llbracket 1; i \rrbracket}$  tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

**Q 3.** Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$ . En déduire que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$ .

**Q 4.** Montrer alors que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$ .

**Q 5.** On ne suppose plus que  $A$  est triangulaire supérieure. Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

## II. Matrices à diagonale strictement dominante

On dit qu'une matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est à diagonale strictement dominante quand :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

Dans les questions **Q 6** à **Q 8**,  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à diagonale strictement dominante et on veut montrer qu'elle est inversible. On raisonne par l'absurde : on suppose donc que  $A$  n'est pas inversible.

**Q 6.** Justifier l'existence d'une matrice colonne  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$  telle que  $AX = 0$ .

**Q 7.** On choisit  $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $|x_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_j|$  : justifier que  $x_{i_0} \neq 0$ .

Montrer que  $|a_{i_0, i_0} x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0, j}| \cdot |x_{i_0}|$ .

**Q 8.** Conclure

### III. Application à la méthode de Gauss-Seidel

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice à diagonale strictement dominante.

On définit ensuite  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de la manière suivante : pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,

- si  $i \geq j$ ,  $m_{i,j} = a_{i,j}$  et  $f_{i,j} = 0$ ;
- si  $i < j$ ,  $m_{i,j} = 0$  et  $f_{i,j} = -a_{i,j}$ .

Ainsi,  $A = M - F$  où  $F$  est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de  $-A$  et où  $M$  est la partie triangulaire inférieure de  $A$ .

Soit  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On note  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  l'unique matrice colonne telle que :

$$AX = Y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers  $X$ .

**Q 9.** Justifier que  $M$  est inversible.

Dans la suite de cette partie, on pose  $B = M^{-1}F$ . On définit par récurrence une suite de matrices colonnes  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y.$$

**Q 10.** Montrer que  $X = BX + M^{-1}Y$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre quelconque de la matrice  $B$ . On note  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  un vecteur propre de  $B$  associé à cette valeur propre.

**Q 11.** Montrer que  $FV = \lambda MV$ . En déduire que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\lambda a_{i,i}| \leq \left( \sum_{j=i+1}^n |a_{i,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \right).$$

puis montrer que  $|\lambda| < 1$ .

**Q 12.** Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$ .

**Q 13.** Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)$$

et conclure.

## Problème 1

**Q 1.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $t \mapsto \cos(x \sin(t))$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  donc l'intégrale  $\int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$  est bien définie.

$$f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.$$

**Q 2.** On définit l'application  $g : \begin{cases} \mathbb{R} \times [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto g(x, t) = \cos(x \sin(t)) \end{cases}$

— Pour tout  $t \in [0, \pi]$ ,  $x \mapsto g(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -\sin^2(t) \cos(x \sin(t)).$$

— Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les applications  $t \mapsto g(x, t)$ ,  $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$  et  $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$  sont continues par morceaux sur  $[0, \pi]$  (segment) donc intégrables sur  $[0, \pi]$ .

— **Hypothèse de domination :** pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$ , on a :

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \left| \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) \right| \leq 1 = \varphi(t)$$

et la fonction constante  $\varphi = 1$  est intégrable sur  $[0, \pi]$ .

**Conclusion :** Par le théorème de dérivations successives pour les intégrales à paramètre,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \quad \text{et} \quad f''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) dt.$$

**Q 3.** Par la formule de dérivation d'un produit, on a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos^2(t) \cos(x \sin(t)).$$

**Q 4.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} x f''(x) + f'(x) + x f(x) &= \int_0^\pi \left( -x \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos(x \sin(t)) \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left( x(1 - \sin^2(t)) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left( x(\cos^2(t)) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) \right) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dt = \left[ h(x, t) \right]_{t=0}^{t=\pi} = \left[ \cos(t) \sin(x \sin(t)) \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0 \end{aligned}$$

**Q 5.** On note  $g : x \in ]-R, R[ \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une solution développable en série entière (avec  $R > 0$  par hypothèse).

En tant que série entière,

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

On a donc l'égalité suivante :

$\forall x \in ]-R, R[$ :

$$\begin{aligned}
 xg''(x) + g'(x) + xg(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
 &= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1}}_{p=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}}_{p=n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)^2 a_{p+1} x^p + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p-1} x^p \\
 &= a_1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \left( (p+1)^2 a_{p+1} + a_{p-1} \right) x^p = 0
 \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière sur un voisinage de 0, tous les coefficients de cette série entière sont nuls c'est-à-dire :  $a_1 = 0$  et  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $(p+1)^2 a_{p+1} + a_{p-1} = 0$ .

En posant  $n = p + 1 \geq 2$ ,  $a_1 = 0$  et pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$ .

**Q 6.** On sait que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :  $\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$  (série entière de référence).

En particulier, avec  $\theta = x \sin(t)$ , pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\cos(x \sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}$$

Dans ce qui suit,  $x$  est un réel fixé.

On définit alors  $\mu_n(t) = (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}$  pour tout  $t \in [0, \pi]$ .

Par construction des fonctions  $\mu_n$ , la série de fonctions  $\sum \mu_n$  converge simplement sur  $[0, \pi]$  et a pour somme  $S : t \in [0, \pi] \mapsto \cos(x \sin(t))$ .

On montre que  $\sum \mu_n$  converge normalement sur ce segment.

$$\forall t \in [0, \pi], \quad |\mu_n(t)| = \frac{|\sin^{2n}(t)|}{(2n)!} |x|^{2n} \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Et donc  $\|\mu_n\|_{\infty, [0, \pi]} = \sup_{t \in [0, \pi]} |\mu_n(t)| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ .

Or  $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  converge absolument (et a pour somme  $\cosh(x)$ ), donc par comparaison,  $\sum \|\mu_n\|_{\infty, [0, \pi]}$  converge aussi.

Ainsi  $\sum \mu_n$  converge normalement et donc uniformément sur le segment  $[0, \pi]$ . Comme les fonctions  $\mu_n$  sont continues sur  $[0, \pi]$ , le théorème d'intégration terme à terme permet d'écrire :

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \mu_n(t) dt$$

$$\text{ou encore : } f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt.$$

On a donc démontré, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{W_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

En particulier  $f$  est bien développable en série entière ( $R = +\infty$ ).

**Q 7.** Tout d'abord,  $f$  est bien une solution de **(E)** sur  $\mathbb{R}$  (**Q4**), elle est bien développable en série entière (**Q6**) et elle vérifie  $f(0) = \int_0^\pi \cos(0) dt = \pi$ .

On remarque aussi que tous les coefficients d'indice impairs du développement en série entière de  $f$  sont nuls, que  $a_0 = f(0) = \pi$  et que (d'après **(Q5)**) ceux d'indices pairs vérifient : si  $n \geq 1$ ,  $a_{2n} = -\frac{a_{2(n-1)}}{(2n)^2}$ .

Maintenant, si  $\tilde{f}$  est une solution de **(E)** sur  $] -R, R[$ , développable en série entière et si elle vérifie  $f(0) = \pi$ , alors, d'après **(Q5)**,  $\tilde{a}_1 = 0$  et pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\tilde{a}_n = -\frac{\tilde{a}_{2n-2}}{(2n)^2}$ .

Par une récurrence immédiate, on montrerait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{a}_{2n+1} = 0 = a_{2n+1}$ .

De plus  $\tilde{a}_0 = \tilde{f}(0) = \pi$  et si  $n \geq 1$ ,  $\tilde{a}_{2n} = -\frac{\tilde{a}_{2(n-1)}}{(2n)^2}$ . Par une récurrence immédiate, on montrerait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{a}_{2n} = a_{2n}$ .

Et finalement,  $\tilde{f} = f$  (et  $R = +\infty$ ).

On a donc démontré que :

$f$  est la seule solution de **(E)** développable en série entière et vérifiant  $f(0) = \pi$ .

**Q 8.** On sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!} x^{2n}$

$$\text{Or } a_{2n} = -\frac{1}{(2n)^2} a_{2(n-1)} = (-1)^2 \frac{1}{(2n)^2 (2n-2)^2} a_{2(n-2)} = \dots = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \pi.$$

Par unicité du développement en série entière, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \pi = \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!}$ . Et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \pi = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \pi.$$

## Problème 2

### I.

**Q 1.** C'est une série entière de référence. Puisque  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , son rayon de convergence est  $R = 1$ .

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!}.$$

**Q 2.** Si  $x \in ]-1, 1[$  alors  $-x \in ]-1, 1[$  et d'après la question **(Q 1)** avec  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1+2n-2}{2}\right) \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n \end{aligned}$$

## II.

**Q 3.** Tout d'abord  $X_t(\Omega) = \{-1, 1\}$  donc  $\left(\frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega) = \{0, 1\}$  et :

$$P\left(\frac{X_t+1}{2} = 1\right) = P(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad P\left(\frac{X_t+1}{2} = 0\right) = P(X_t = -1) = 1 - p.$$

Donc  $\boxed{\frac{X_t+1}{2} \sim \mathcal{B}(p)}.$

Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes donc par le lemme des coalitions, les variables aléatoires  $\frac{X_1+1}{2}, \dots, \frac{X_n+1}{2}$  sont aussi indépendantes. Comme elles suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , leur somme  $Y_n = \sum_{t=1}^n \frac{X_t+1}{2}$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

$$\boxed{Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

**Q 4.** Avec les notations de l'énoncé, on a  $Y_n = \sum_{t=1}^n \frac{X_t+1}{2} = \frac{1}{2}(S_n + n)$ .

Et donc l'événement  $(S_n = 0)$  est aussi l'événement  $\left(Y_n = \frac{n}{2}\right)$ .

Comme  $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ , si  $n$  est impair,  $P(S_n = 0) = 0$ .

Si  $n$  est pair, alors  $P(S_n = 0) = P\left(Y_n = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2} (1-p)^{n-n/2}$ .

On a bien  $\boxed{u_n = P(S_n = 0) = \begin{cases} \binom{n}{n/2} (p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

**Q 5.** On a  $u_{2n} = \binom{2n}{n} (p(1-p))^n$ .

On voudrait utiliser le résultat de (**Q 2**) avec  $\frac{x^n}{2^{2n}} = (p(1-p))^n$ , c'est-à-dire avec  $x = 4p(1-p)$ . Or l'application  $x \in [0, 1] \mapsto x(1-x)$  prend ses valeurs dans  $[0, 1/4]$  et atteint son maximum  $\frac{1}{4}$  uniquement en  $x = \frac{1}{2}$ . On distingue deux cas.

- si  $p \neq \frac{1}{2}$  : alors  $x = 4p(1-p) \in ]0, 1[$  et donc la série  $\sum u_{2n} = \sum \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$  converge. Par conséquent, son terme général tend vers 0.
- si  $p = \frac{1}{2}$  : par la formule de Stirling, on a :

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi}}{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2n\pi} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque : dans les deux cas, on a

$$u_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans tous les cas, on a bien démontré,  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 0}.$

Ce qui signifie que la probabilité de retour à l'origine au bout de  $2n$  déplacements tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## III.

**Q 6.**  $T_n$  représente le nombre de passage à l'origine au cours de  $2n$  déplacements.

**Q 7.**  $O_{2j}(\Omega) = \{0, 1\}$  avec  $P(O_{2j} = 1) = P(S_{2j} = 0) = u_{2j}$  donc  $\boxed{O_{2j} \sim \mathcal{B}(u_{2j})}.$

De plus, par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^n O_{2j}\right) = \sum_{j=0}^n \mathbb{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^n u_{2j}$$



On a donc bien  $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j.$

**Q 8.** On suppose que  $p \neq \frac{1}{2}$ .

On a alors  $4p(1-p) \in ]0, 1[$  et en appliquant le résultat de (**Q 2**) à  $x = 4p(1-p)$ , on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (4p(1-p))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p))^n$$

ce qui signifie par définition de série convergente que :

$$\text{Si } p \neq \frac{1}{2} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

**Q 9.** On suppose que  $p = \frac{1}{2}$ . On montre le résultat attendu par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

— Pour  $n = 0$  :  $T_0 = O_0 = 1$  car à l'instant  $t = 0$ , la particule est à l'origine. Donc  $\mathbb{E}(T_0) = \mathbb{E}(1) = 1$ .

De plus, pour  $n = 0$ ,  $\frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = 1$ , le résultat est donc vérifié pour  $n = 0$ .

— Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose le résultat démontré pour ce  $n$ . On a  $T_{n+1} = T_n + O_{2n+2}$ .

Par linéarité de l'espérance et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{n+1}) &= \mathbb{E}(T_n) + \mathbb{E}(O_{2n+2}) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \left( (2n+1)2^2 \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} (2(n+1) + 1) = \frac{2n+3}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \end{aligned}$$

Finalement, par le principe de récurrence, on a démontré :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$

**Méthode 1 :** On utilise comme cela est suggéré le résultat précédent.

On a vu en (**Q 5**) que dans ce cas,  $u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$

On a donc  $\mathbb{E}(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{\sqrt{n\pi}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et alors  $\mathbb{E}(T_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$

## Problème 3

### I.

**Q 1.**  $T$  est la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ , sa première colonne donne l'image de  $e_1$  :  $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ .

Par une récurrence immédiate, on montrerait que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$ . Et puisque  $|\lambda_1| < 1$ , on a :

$$\|u^k(e_1)\| = \|\lambda_1^k e_1\| = |\lambda_1|^k \|e_1\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Et de manière immédiate  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_1) = 0$ .

**Q 2.** La  $i+1$ -ème colonne de  $T$  donne l'image de  $e_{i+1}$  par  $u$ . Plus précisément :

$$u(e_{i+1}) = \underbrace{T_{1,i+1}e_1 + \dots + T_{i,i+1}e_i}_{=x} + \lambda_{i+1}e_{i+1}.$$

On a bien trouvé  $x \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$  tel que  $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x.$

On pourrait démontrer le résultat demandé par récurrence. On choisit ici de faire apparaître une série télescopique.

— si  $\lambda_{i+1} \neq 0$  : on a  $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$  et comme  $u^m$  est linéaire :

$$\forall m \in \mathbb{N}, u^{m+1}(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}u^m(e_{i+1}) = u^m(x).$$

On divise par  $\lambda_{i+1}^{m+1} \neq 0$  :  $\frac{u^{m+1}(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^{m+1}} - \frac{u^m(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^m} = \frac{u^m(x)}{\lambda_{i+1}^{m+1}}$ . On ajoute ces égalités pour  $m = 0, \dots, k-1$ . La somme est télescopique, il reste :

$$\frac{u^k(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^k} - \frac{u^0(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^0} = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{-m-1} u^m(x).$$

En multipliant par  $\lambda_{i+1}^k$ , on obtient le résultat demandé.

— si  $\lambda_{i+1} = 0$  : alors d'une part,  $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x = x$  donc  $u^k(e_{i+1}) = u^{k-1}(x)$ .

Et d'autre part, dans la somme suivante, tous les termes sont nuls sauf un, celui pour  $m = k-1$  :

$$\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = u^{k-1}(x) = u^k(e_{i+1}).$$

Dans les deux cas, on a bien démontré que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k(e_{i+1}) = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

**Q 3.** On a  $x \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$  donc il existe des complexes  $x_1, \dots, x_i$  tels que  $x = \sum_{j=1}^i x_j e_j$ .

Par linéarité de  $u$ ,  $u^k(x) = \sum_{j=1}^i x_j u^k(e_j)$ . On a supposé que pour tout  $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_j) = O$ .

Par opérations sur les limites, on a donc aussi :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(x) = O.$$

Une première conséquence est que la suite  $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée :  $\exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \|u^k(x)\| \leq M$ .

On montre le résultat demandé en revenant à la définition de limite.

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé : on a les majorations suivantes (inégalité triangulaire).

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|.$$

Or,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} u^m(x) = 0$  donc, il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall k \geq N, \|u^m(x)\| \leq \varepsilon.$$

Pour  $k > N$ , on coupe la somme en 2. On sait que  $|\lambda_{i+1}| < 1$  donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{i+1}|^n$  converge et a pour somme

$$\frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| &= \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq M} + \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq M \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} + \varepsilon \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \\ &\leq M \sum_{n=k-N}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n \\ &\leq \frac{M}{1 - |\lambda_{i+1}|} |\lambda_{i+1}|^{k-N} + \varepsilon \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|} \end{aligned}$$

Or  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_{i+1}|^{k-N} = 0$  donc il existe  $N' \geq N$  tel que pour tout  $k \geq N'$ , on ait  $|\lambda_{i+1}|^{k-N} \leq \varepsilon$ .

En reportant dans la majoration précédente, on a trouvé  $N'$  tel que pour tout entier  $k \geq N'$ , on ait :

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \leq \varepsilon \frac{M+1}{1-|\lambda_{i+1}|} = C\varepsilon.$$

Quitte à reprendre le raisonnement avec  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$ , on a bien démontré que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0.$$

On a alors, en utilisant (Q 2) et  $|\lambda_{i+1}| < 1$  :

$$\|u^k(e_{i+1})\| = \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

et par le théorème d'encadrement  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$ .

**Q 4.** Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note  $\mathcal{P}_i$  la propriété :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_i) = 0$ .

En question (Q 1), on a montré que  $\mathcal{P}_1$  est vraie. Dans les deux questions suivantes, on a montré que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  si  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i$  sont vraies, alors  $\mathcal{P}_{i+1}$  est vraie.

Par le principe de **récurrence forte**,  $\mathcal{P}_i$  est vraie pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

On note comme dans l'énoncé,  $T_{i,j}^{(k)}$  les coefficients de  $T^k$ . Puisque  $T^k$  est la matrice de  $u^k$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on a :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, u^k(e_j) = \sum_{i=1}^n T_{i,j}^{(k)} e_i$$

Et comme  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_i) = 0$ , ses suites coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  tendent aussi vers 0.

Et finalement :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lim_{k \rightarrow +\infty} T_{i,j}^{(k)} = 0.$$

Et par conséquent,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$ .

**Q 5.** On suppose juste que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et que :  $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| < 1$ .

On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  répétées avec multiplicité. Puisque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé et donc  $A$  est trigonalisable. Plus précisément, il existe une matrice triangulaire supérieure  $T$  dont les coefficients diagonaux sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , et une matrice inversible  $P$  telles que :

$$A = PTP^{-1}.$$

D'après les questions précédentes, on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$ .

De plus,  $A^k = (PTP^{-1})^k = PTP^{-1}.PTP^{-1} \dots PTP^{-1} = PT^kP^{-1}$ .

Enfin, l'application  $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$  est linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie, elle est continue, en particulier continue en 0. Puisque  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$ , on a donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(T^k) = \varphi(0) = 0.$$

Ce qui s'écrit  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

## II.

**Q 6.**  $A$  n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre de  $A$  : il existe donc une matrice colonne  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$  telle que

$$AX = 0.$$

**Q 7.** Pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $|x_j| \leq |x_{i_0}|$  donc si  $x_{i_0} = 0$ , on a alors pour tout  $j$ ,  $x_j = 0$ , ce qui contredit le fait que  $X \neq 0$

Comme  $AX = 0$ , alors en considérant la  $i_0$ -ème ligne du produit  $AX$ , on a  $\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = 0$  donc en isolant le  $i_0$ -ème

$$\text{terme : } a_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j$$

$$\text{puis par inégalité triangulaire, } |a_{i_0,i_0} x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| |x_{i_0}|.$$

**Q 8.** Comme  $|x_{i_0}| > 0$ , on en déduit l'inégalité  $|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}|$ , ce qui contredit l'hypothèse de dominance stricte de la diagonale de  $A$ .

### III.

**Q 9.** Remarquons tout d'abord que puisque  $A$  est une matrice à diagonale strictement dominante et puisqu'un module est un réel positif ou nul, on a, grâce à l'inégalité stricte :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| > 0$ .

$M$  est une matrice triangulaire inférieure donc

$$|\det(M)| = \prod_{i=1}^n |m_{ii}| = \prod_{i=1}^n |a_{ii}| > 0$$

Ainsi  $\det(M) \neq 0$  et  $M$  est inversible.

**Q 10.** Avec les notations de l'énoncé :

$$BX + M^{-1}Y = M^{-1}FX + M^{-1}AX = M^{-1}(F + A)X = M^{-1}MX = X$$

**Q 11.** Par définition de  $\lambda$  et  $V$ ,  $V \neq 0$  et  $BV = \lambda V$ .

Donc  $M^{-1}FV = \lambda V$  et en multipliant par  $M$  à gauche,  $FV = \lambda MV$ .

On pose  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ .

En utilisant les définitions de  $M$  et  $F$  et la convention de l'énoncé, l'égalité vectorielle précédente se traduit alors par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} v_j = \lambda \left( \sum_{j=1}^i a_{ij} v_j \right)$$

En isolant le terme  $a_{ii}$ , on obtient donc

$$\lambda a_{ii} v_i = - \left( \sum_{j=i+1}^n a_{ij} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} v_j \right)$$

$\{|v_j| / j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  est un ensemble fini de réels donc admet un maximum  $|v_{i_0}|$ . Comme  $V$  est un vecteur non nul, il existe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $v_j \neq 0$  et donc  $|v_{i_0}| \geq |v_j| > 0$ . Ainsi  $v_{i_0} \neq 0$ .

En particulier, pour  $i = i_0$  et après application de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\lambda a_{i_0 i_0} v_{i_0}| &\leq \left| \sum_{j=i_0+1}^n a_{i_0 j} v_j \right| + |\lambda| \left| \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0 j} v_j \right| \\ |\lambda a_{i_0 i_0}| |v_{i_0}| &\leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| |v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| |v_j| \end{aligned}$$

$|v_{i_0}| > 0$  donc

$$|\lambda a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|}$$

Par définition de  $i_0$ ,  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leq 1$  et on manipule des termes positifs donc

$$|\lambda a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}|$$

Si  $\lambda = 0$ , on a bien  $|\lambda| < 1$ .

Sinon,  $A$  étant une matrice à diagonale strictement dominante, on a :

$$|\lambda| |a_{i_0 i_0}| > |\lambda| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| + |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}|$$

On en déduit

$$\sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| > |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}|$$

Et  $\sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| > 0$  car sinon, on aurait  $0 > 0$  donc en simplifiant, on obtient

$$|\lambda| < 1$$

**Q 12.** Les valeurs propres de  $B$  sont donc toutes de module strictement inférieur à 1. Par conséquent la **partie II** permet de conclure que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0.$$

**Q 13.** Montrons le résultat par récurrence. On note pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}_k : X_k - X = B^k(X_0 - X)$ .

—  $\mathcal{H}_0$  est clairement vraie.

— Si  $\mathcal{H}_k$  vraie, alors :

par définition de la suite et par **Q31.**, on a :

$$X_{k+1} - X = (BX_k + M^{-1}Y) - (BX + M^{-1}Y) = B(X_k - X)$$

Donc par **HR<sub>k</sub>**,  $X_{k+1} - X = B^{k+1}(X_0 - X)$  et  $\mathcal{H}_{k+1}$  est vraie.

Conclusion : On a montré par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)$$

De plus,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie et l'application  $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M(X_0 - X)$  est linéaire donc elle est continue (en 0). Comme  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$ , on en déduit que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi(B^k) = \psi(0) = 0$ . Ainsi :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (X^k - X) = 0.$$

La suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge donc bien vers  $X$ .