Problème 1 - D'après ENS 2016

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles strictement positives dont la loi est donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i \geq 0 \text{ avec } \sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1,$$

où $(x_i)_{i\geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs distincts.

On suppose que X admet une espérance finie notée $m = \mathbb{E}(X) > 0$.

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles strictement positives indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X. On note $(S_k)_{k\geq 0}$ la suite des sommes partielles définies par

$$S_0 = 0 \quad \text{et pour } n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objet de ce problème est l'étude du nombre (aléatoire) d'éléments de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui appartiennent à l'intervalle $[a, b]$, défini pour $\omega \in \Omega$ par

$$N(a,b)(\omega) = \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} \ / \ S_k(\omega) \in [a,b]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{S_k \in [a,b]\}}(\omega),$$

et en particulier le comportement de $N(a,b)$ quand a et b tendent vers l'infini.

I.

Q 1.

a) Justifier pour tous $\ell \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \{N(0,\ell) = n+1\} &= \{S_n \leq \ell < S_{n+1}\} \\ \{S_n \leq \ell\} &= \{N(0,\ell) \geq n+1\}, \\ \{S_n \geq \ell\} &\subset \{N(0,\ell) \leq n+1\}. \end{aligned}$$

b) On suppose dans cette question que X admet de plus une variance finie v. Montrer alors que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}(S_n \leq n(m-\varepsilon)) \leq \frac{v}{\varepsilon^2 n}.$$

Q 2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On convient que Y admet une espérance, éventuellement infinie, si $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$ et on pose alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y = k)$.

Montrer que l'on a dans ce cas

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq k).$$

Q 3.

a) Montrer pour $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \geq 0$: $\mathbb{P}(S_n \leq \ell) \leq \mathbb{E}(\exp(\ell - S_n))$, puis : $\mathbb{P}(S_n \leq \ell) \leq e^{\ell}\mathbb{E}(\exp(-X))^n$.

b) En déduire que $\mathbb{P}(S_n \leq \ell)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et que $\mathbb{E}(N(0,\ell)) \leq \dfrac{e^{\ell}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

c) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $\ell \geq 0$, $k, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n,\ N(x, x+\ell) \geq k) \leq \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n)\, \mathbb{P}(N(0,\ell) \geq k),$$

puis :

$$\mathbb{E}(N(x, x+\ell)) \leq \frac{e^{\ell}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}.$$

II.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est bornée, on note $\|f\|_{+\infty} = \sup(|f(x)|,\ x \in \mathbb{R})$ sa norme uniforme. On appelle support de f l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R}\ /\ f(x) \neq 0\}$. En particulier, si x n'appartient pas au support de f, alors $f(x) = 0$.

Soit $K > 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive bornée à support inclus dans $[0, K]$. Nous allons étudier la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour $n \geq 0$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(g(x - S_k)).$$

Q 4.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On note $f(x)$ sa limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

b) Montrer que si $g = \mathbf{1}_{[0,K]}$, alors $f(x) = \mathbb{E}(N(x - K, x))$.

c) En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(x) \leq \|g\|_{+\infty} \dfrac{e^K}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

d) Conclure que la suite de fonctions f_n converge simplement vers une fonction f positive, bornée et dont le support est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Q 5. Soit Y une variable aléatoire réelle discrète, indépendante de X, et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que $\mathbb{E}(\varphi(X, Y)) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i \mathbb{E}(\varphi(x_i, Y))$.

Q 6.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = g(x) + \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i f_n(x - x_i)$.

b) Montrer que la fonction f vérifie l'égalité suivante sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f(x - x_i). \tag{E}$$

Q 7. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée qui vérifie $h(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i h(x - x_i)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $h(x) = \mathbb{E}(h(x - S_n))$.

b) En déduire que si de plus le support de h est inclus dans $\mathbb{R}^+$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0$.

c) Conclure qu'il existe une unique fonction bornée à support dans $\mathbb{R}^+$ solution de (E).

Q 8.

a) Montrer que l'ensemble $\Lambda_X = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{y \in \mathbb{R}\ /\ \mathbb{P}(S_n = y) > 0\}$ est dénombrable et inclus dans $\mathbb{R}^+$.

On donne une énumération de cet ensemble : $\Lambda_X = \{y_i\ /\ i \in \mathbb{N}\}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = y_i) g(x - y_i)$.

c) En déduire qu'il existe une suite de réels positifs $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} q_i g(x - y_i), \text{ et } \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[x-K,x]} q_i = \mathbb{E}(N(x - K, x)).$$

Q 9.

a) Dans la formule précédente, montrer que la convergence de la série est normale sur tout segment de $\mathbb{R}$.

b) On suppose que g est continue. Montrer que f est uniformément continue. *On pourra utiliser la question* **3c**.

c) On suppose que g est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que g' est bornée. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$, que f' est bornée et uniformément continue et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = g'(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f'(x - x_i).$$

III.

Soit Λ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall (x, y) \in \Lambda^2 \quad x + y \in \Lambda$. On dit que Λ est stable par addition.

On définit $\Gamma = \{z \in \mathbb{R}^{+*}\ /\ \exists (x, y) \in \Lambda^2 \quad z = y - x\}$ et $r(\Lambda) = \inf(\Gamma)$.

Q 10.

a) Montrer que si $x, y \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$, alors $nx + k(y-x) \in \Lambda$.

b) Donner deux exemples de tels ensembles Λ, l'un pour lequel $r(\Lambda) > 0$ et l'autre pour lequel $r(\Lambda) = 0$.

Q 11. Dans cette question, on suppose que $r(\Lambda) > 0$.

a) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \Lambda^2$ tels que $b - a \in [r(\Lambda), 2r(\Lambda)[$. On note $d = b - a$.

b) Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n-1$. Montrer que $\Lambda \cap [na + kd, na + (k+1)d] = \{na + kd, na + (k+1)d\}$.

c) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 a + n_0 d > (n_0+1)a$ puis qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kd$.

d) En déduire que $A \subset d\mathbb{Z}$, où $d\mathbb{Z} = \{kd \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$.

Q 12. On suppose maintenant que $r(\Lambda) = 0$.

a) Soit $\eta > 0$. Montrer qu'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $x > A$, $\Lambda \cap [x, x+\eta] \neq \emptyset$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Λ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

IV.

On suppose dans cette partie que pour tout $d \geq 0$, $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) < 1$.

Q 13. On considère une fonction h uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\; h(x) \leq h(0) \text{ et } h(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i h(x - x_i).$$

On rappelle que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $h(x) = \mathbb{E}(h(x - S_n))$ (question **7a**).

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$ tels que $\mathbb{P}(S_n = x) > 0$, on a $h(-x) = h(0)$.

b) Soit Λ_X l'ensemble défini en **8a**. Montrer que $\Lambda_X \setminus \{0\}$ est stable par addition et $r(\Lambda_X \setminus \{0\}) = 0$.

c) En déduire que $h(-x) \to h(0)$ quand $x \to +\infty$.

d) Conclure que h est une fonction constante.

On suppose dans toute la suite que g est de classe $\mathscr{C}^1$, à support dans $[0, K]$ avec $K > 0$. On rappelle que f est la limite croissante des fonctions f_n et l'unique solution de l'équation (E) bornée à support dans $\mathbb{R}^+$, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et que f' est bornée, uniformément continue.

Q 14.

a) Prouver que la fonction $x \mapsto \sup\limits_{t\geq x)} f'(t)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

On note $c = \lim\limits_{x\to+\infty} \sup\limits_{t\geq x)} f'(t)$.

b) Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $f'(y_n) \to c$ quand $n \to +\infty$.

On admet qu'il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sous-suite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par $\xi_k(t) = f'(t + t_k)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers une fonction notée ξ.

c) Montrer que ξ est constante, égale à c.

d) Conclure que $c = 0$.

On montrerait de même que $\lim\limits_{x\to+\infty} \inf\limits_{t\geq x} f'(t) = 0$, résultat que l'on admet dans toute la suite.

e) En déduire que $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

f) Montrer alors que pour tout $\ell \geq 0$, $f(t+\ell) - f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

L'énoncé initial contient quelques questions infaisables selon la définition de l'intégrale donnée en CPGE. Je ne les ai pas reproduites. Pour pouvoir finir l'énoncé, il suffit d'admettre le résultat suivant :

pour tout $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue par morceaux positive bornée à support inclus dans un segment de $\mathbb{R}^+$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(g(x - S_k)) \to \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ quand } x \to +\infty.$$

Q 15. Soit $\ell > 0$ fixé. Déterminer le comportement de $\mathbb{E}(N(x, x+\ell))$ quand $x \to +\infty$. Interpréter le résultat. Ce résultat est-il vrai s'il existe $d > 0$ tel que $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) = 1$?

Problème 1

I.

Q 1.

a) Pour $\ell = 0$, on considère que $[0, \ell] = \{\ell\}$. Pour $\Omega \in \Omega$ la suite $(S_k(\Omega))$ est strictement croissante. Si $N(0, \ell) = n+1$, alors il y a $n+1$ indices k tels que $0 \leq S_k(\Omega) \leq \ell$ et ce sont les $n+1$ premiers d'où $S_n(\Omega) \leq \ell < S_{n+1}(\Omega)$. Ainsi, $\{N(0, \ell) = n+1\} \subset \{S_n \leq \ell < S_{n+1}\}$.

L'inclusion réciproque ainsi que les deux autres relations se justifient de manière analogue.

b) C'est l'inégalité de Bienaymé-Chebychev pour S_n d'espérance $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = nm$ et de variance $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = nv$ par indépendance des X_k.

Q 2. On a dans $[0, +\infty]$:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{k=\ell}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq \ell).$$

L'interversion des sommations est valide, s'agissant de réels positifs.

Q 3.

a) C'est l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\exp(\ell - S_n)$ d'espérance

$$\mathbb{E}(e^{\ell - X_1 - \cdots - X_n}) = e^{\ell}\mathbb{E}(e^{-X_1}) \ldots \mathbb{E}(e^{-X_n}) = e^{\ell}\mathbb{E}(e^{-X})^n.$$

b) $\mathbb{E}(e^{-X}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i e^{-x_i} < 1$, d'où la convergence de $\mathbb{P}(S_n \leq \ell)$ vers 0.

Ensuite, $\mathbb{P}(N(0, \ell) \geq n) = \mathbb{P}(S_{n-1} \leq \ell) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par continuité décroissante, $\mathbb{P}(N(0, \ell) = +\infty) = 0$.

Enfin, $\mathbb{E}(N(0, \ell)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N(0, \ell) \geq n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\ell}\mathbb{E}(e^{-X})^{n-1} = \frac{e^{\ell}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

c) On note $A_n = \{a \in \mathbb{R} \ / \ \mathbb{P}(S_n = a) \neq 0\}$, $A = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $D = A - A$ (ensembles dénombrables) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n,\ N(x, x+\ell) \geq k) \\
&= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ c \in A, c \leq x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b, S_{n+k-1} = c) \\
&= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ c \in A, c \leq x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b, S_{n+k-1} - S_n = c - b) \\
&= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ c \in A, c \leq x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\, \mathbb{P}(S_{n+k-1} - S_n = c - b) && \text{(indépendance des } X_i\text{)} \\
&= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ c \in A, c \leq x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\, \mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = c - b) && \text{(équidistribution des } X_i\text{)} \\
&= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ d \in A - b, d \leq x+\ell-b}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\, \mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = d) \\
&\leq \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ d \in D, d \leq \ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\, \mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = d) \\
&= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\, \mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 \leq \ell)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 \leq \ell) \\
&= \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n)\,\mathbb{P}(N(0,\ell) \geq k).
\end{aligned}
$$

En sommant sur n, on obtient $\mathbb{P}(N(x, x+\ell) \geq k) \leq \mathbb{P}(N(0,\ell) \geq k)$, ce qui implique par continuité décroissante $\mathbb{P}(N(x, x+\ell) = \infty) = 0$ puis $\mathbb{E}(N(x, x+\ell) \leq \mathbb{E}(N(0,\ell)) \leq \dfrac{e^{\ell}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

II.

Q 4.

a) $f_n(x)$ est la n-ème somme partielle d'une série termes positifs (finis car g est bornée).

b) Pour $\Omega \in \Omega$ on a $N(x-K, x)(\Omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(x - S_k(\Omega)) = \sum_{k=0}^{+\infty} Y_k(\Omega)$ et il s'agit de prouver que $\mathbb{E}(N(x-K,x)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k) = f(x)$.

Pour ce faire, considérons le schéma d'interversion des limites suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y_0 + \cdots + Y_p \geq k) \arrow[r, "(1)", "n \text{ fixé},\ p\to+\infty"'] \arrow[d, "(2)"', "n\to+\infty,\ p \text{ fixé}"] & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N(x-K,x) \geq k) \arrow[d, "n\to+\infty"] \\
\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_0 + \cdots + Y_p \geq k)}_{\mathbb{E}(Y_0) + \cdots + \mathbb{E}(Y_p)\ \xrightarrow[p\to+\infty]{}\ f(x)} & \mathbb{E}(N(x-K,x))
\end{tikzcd}
$$

(1) a lieu par continuité croissante. Pour égaler les limites, il suffit de prouver l'uniformité de (2) par rapport au paramètre p. Et de fait :

$$
0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_0 + \cdots + Y_p \geq k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(N(x-K,x) \geq k),
$$

quantité indépendante de p, et tendant vers 0 quand $n \to +\infty$ en tant que reste d'une série convergente (on a vu que $\mathbb{E}(N(x-K,x)$ est finie en **3c**).

c) Car $g \leq \|g\|_{+\infty} \mathbf{1}_{[0,K]}$.

d) La suite $(f_n(x))$ étant croissante et majorée, il y a finitude de $f(x)$ et convergence simple de f_n vers f. f est positive et est nulle sur $]-\infty, 0[$ car les f_n le sont.

Donc $\{x \ /\ f(x) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^+$ et le support de f est lui aussi inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Enfin f est bornée car les f_n sont bornées par deux mêmes constantes.

Q 5. On note $A = \{a \in \mathbb{R} \ /\ \mathbb{P}(X = a) \neq 0\}$ et $B = \{b \in \mathbb{R} \ /\ \mathbb{P}(Y = b) \neq 0\}$ (ensembles finis ou dénombrables) :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) &= \sum_{(a,b) \in A \times B} \varphi(a,b)\,\mathbb{P}(X = a, Y = b) \\
&= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \varphi(a,b)\,\mathbb{P}(X = a)\,\mathbb{P}(Y = b) \\
&= \sum_{a \in A} \mathbb{E}(\varphi(a,Y))\,\mathbb{P}(X = a).
\end{aligned}
$$

Q 6.

a)

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \mathbb{E}(g(x - S_0)) + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(g(x - X_1 - (X_2 + \cdots + X_k)) \\
&= g(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=0}^{+\infty} p_i \mathbb{E}(g(x - x_i - (X_2 + \cdots + X_k)) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} p_i \mathbb{E}(g(x - x_i - (X_2 + \cdots + X_k))
\end{aligned}
$$

$$= g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n+1} p_i\mathbb{E}(g(x - x_i - (X_1 + \cdots + X_{k-1})) \qquad \text{(équidistribution)}$$
$$= g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f_n(x - x_i).$$

b) On a pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) \leq g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f(x - x_i)$, d'où en faisant tendre n vers l'infini à x fixé :

$$f(x) \leq g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f(x - x_i).$$

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) \geq g(x) + \sum_{i=0}^{k} p_i f_n(x - x_i)$, puis en faisant tendre n vers l'infini à x, k fixés : $f(x) \geq g(x) + \sum_{i=0}^{k} p_i f(x - x_i)$, et enfin en faisant tendre k vers l'infini :

$$f(x) \geq g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f(x - x_i).$$

Q 7.

a) C'est vrai pour $n = 0$ et si ça l'est pour n alors :

$$\mathbb{E}(h(x - S_{n+1})) = \mathbb{E}(h(x - X_{n+1} - S_n)) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\mathbb{E}(h(x - x_i - S_n)) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i h(x - x_i) = h(x).$$

b) Pour $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $|h(x - S_n(\omega))| \leq \|h\|_{+\infty}\mathbf{1}_{\{S_n \leq x\}}(\omega)$ donc

$$|h(x)| \leq |\mathbb{E}(h(x - S_n))| \leq \mathbb{E}(|h(x - S_n)|) \leq \|h\|_{+\infty}\mathbb{P}(S_n \leq x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

c) Si f, f' sont deux solutions de (E) alors $h = f - f'$ vérifie les hypothèses de la question précédente donc est nulle.

Q 8.

a) C'est l'ensemble A introduit dans la réponse à **3c**.

b) C'est la formule de transfert pour $\mathbb{E}(g(x - S_k))$.

c) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = y_i)g(x - y_i) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = y_i)g(x - y_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} q_{i,n} g(x - y_i)$.

Comme les X_j sont à valeurs strictement positives, pour tout i les évènements $\{S_k = y_i\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et donc $q_{i,n} = \mathbb{P}(\exists k \in [\![0, n]\!] \ / \ S_k = y_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N} \ / \ S_k = y_i) = q_i$ par continuité croissante.

On a donc $f_n(x) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} q_i g(x - y_i)$ (inégalité dans $[0, +\infty]$) puis en faisant tendre n vers l'infini à x fixé : $f(x) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} q_i g(x - y_i)$.

L'inégalité inverse se démontre comme en **6b** en minorant $f_n(x)$ par une somme finie. En particulier la série $\sum_{i=0}^{+\infty} q_i g(x - y_i)$ est convergente. La deuxième relation demandée s'obtient en prenant $g = \mathbf{1}_{[0,K]}$.

Q 9.

a) Soit $[a, b]$ un segment. Pour $x \in [a, b]$ et $i \in \mathbb{N}$ on a $|q_i g(x - y_i)| \leq \|g\|_{+\infty} q_i \mathbf{1}_{[a-K,b]}(y_i)$, quantité indépendante de x et dont la série converge vers $\|g\|_{+\infty}\mathbb{E}(N(a - K, b))$.

b) g étant continue à support compact est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ associé : $|g(s) - g(t)| \leq \varepsilon$ pour tous s, t tels que $|s - t| \leq \delta$. Quitte à le diminuer, on peut supposer $\delta \leq 1$. Considérons $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $|s - t| \leq \delta$ avec par exemple $s \leq t$:

$$|f(s) - f(t)| = \Big|\sum_{i=0}^{+\infty} q_i(g(s - y_i) - g(t - y_i))\Big|$$
$$= \Big|\sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[s-K,t]} q_i(g(s - y_i) - g(t - y_i))\Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[s-K,t]} q_i|g(s-y_i)-g(t-y_i)| \\
&\le \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[s-K,t]} q_i\varepsilon \\
&= \varepsilon\mathbb{E}(N(s-K,t)) \\
&\le \varepsilon\frac{e^{t-s+K}}{1-\mathbb{E}(\exp(-X))} && \text{(question } \mathbf{3c}\text{)} \\
&\le \varepsilon\frac{e^{1+K}}{1-\mathbb{E}(\exp(-X))}.
\end{aligned}
$$

c) g' est continue et à support compact. Elle est donc bornée. Il en résulte que la série des dérivées $\sum_{i=0}^{+\infty} q_i g'(x-y_i)$ est normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$ comme en **9a**, donc que f est de classe $\mathscr{C}^1$ avec $f'(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} q_i g'(x-y_i)$. On a ensuite

$$|f'(x)| \le \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[x-H,x]}^{+\infty} q_i\|g'\|_\infty = \mathbb{E}(N(x-K,x))\|g'\|_\infty \le \frac{e^K\|g'\|_\infty}{1-\mathbb{E}(e^{-X})}$$

donc f' est bornée. La continuité uniforme de f' se démontre comme en **9b**. Enfin, comme la série $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i$ est absolument convergente, on peut dériver (E) terme à terme ce qui donne la dernière relation.

III.

Q 10.

a) $nx + k(y-x) = (n-k)x + ky$ et $n-k, k$ ne sont pas simultanément nuls.

b) $\mathbb{N}^*$ et $]0,+\infty[$ sont stables par addition avec $r(\mathbb{N}^*) = 1$ et $r(]0,+\infty[) = 0$.

Q 11.

a) C'est une propriété de la borne inférieure.

b) Les deux points $na+kd, na+(k+1)d$ appartiennent bien à l'intersection d'après **10a** et tout autre point de $[na+kd, na+(k+1)d]$ est à une distance moindre que $d/2$ de l'une des deux bornes. Comme $d/2 < r(\Lambda)$, il n'appartient pas à Λ.

c) Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \ / \ nd > a\}$, qui existe et est supérieur ou égal à 1 car a et d sont strictement positifs. On a $n_0a + n_0d > (n_0+1)a$ par construction, et $n_0a + (n_0-1)d \le (n_0+1)a < n_0a + n_0d$. Ces trois nombres appartiennent à Λ donc les deux premiers sont égaux d'après la question précédente.

Ainsi $a = (n_0-1)d$.

d) Soit $x \in \Lambda$ tel que $x \ge n_0a$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na \le x < (n+1)a$ puis il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $na + kd \le x < na + (k+1)d$. On a $n \ge n_0$ et $k \le n$ car $na + (n+1)d > na + n_0d > (n+1)a > x$ donc $x = na + kd$ d'après **11b**.

Ainsi tout élément de Λ suffisamment grand est divisible par d. Pour $x \in \Lambda$ quelconque il existe deux multiples successifs mx, $(m+1)x$ qui relèvent du cas précédent. Ils sont divisibles par d et leur différence, x, l'est aussi. Ainsi $\Lambda \subset d\mathbb{Z}$.

Q 12.

a) Soient $a, b \in \Lambda$ tels que $0 < b-a < \eta$. Λ contient toutes les combinaisons $na + k(b-a)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \le k \le n$. En particulier, tout segment de longueur η dont la borne inférieure appartient à $[na, nb]$ contient un élément de Λ.

On a $(n+1)a \le nb$ si $a \le n(b-a)$, ce qui a lieu dès que n est assez grand, mettons $n \ge n_0$. Alors $\bigcup_{n=n_0}^{+\infty}[na, nb] = [n_0a, +\infty[$ donc $A = n_0a$ convient.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $|x-y| \le \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \le \varepsilon$. Considérons une suite de réels (x_n) telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Pour n assez grand ($n \ge n_0$) il existe $y_n \in \Lambda$ tel que $x_n \le y_n \le x_n + \eta$. La suite $(y_n)_{n\ge n_0}$ est à valeurs dans Λ et tend vers l'infini donc pour n encore plus grand ($n \ge n_1$) on a $|f(x_n) - f(y_n)| \le \varepsilon$ et $|f(y_n)| \le \varepsilon$ d'où $|f(x_n)| \le 2\varepsilon$.

On a ainsi prouvé que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, puis $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par caractérisation séquentielle de la limite.

IV.

Q 13.

a)

$$\begin{aligned} h(0) = \mathbb{E}(h(-S_n)) &= \sum_{i=0}^{+\infty} h(-y_i)\,\mathbb{P}(S_n = i) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\neq x} h(-y_i)\,\mathbb{P}(S_n = i) + h(-x)\,\mathbb{P}(S_n = x) \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\neq x} h(0)\,\mathbb{P}(S_n = i) + h(-x)\,\mathbb{P}(S_n = x) \\ &= h(0)\,\mathbb{P}(S_n \neq x) + h(-x)\,\mathbb{P}(S_n = x). \end{aligned}$$

On en déduit $(h(0) - h(-x))\mathbb{P}(S_n = x) \leq 0$, puis $h(0) \leq h(-x)$ et enfin l'égalité.

b) Si $x, y \in \Lambda_X \setminus \{0\}$, soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(S_n = x) > 0$ et $\mathbb{P}(S_p = y) > 0$. Alors par équidistribution on a aussi $\mathbb{P}(S_{n+p} - S_n = y) > 0$, d'où

$$\mathbb{P}(S_{n+p} = x + y) \geq \mathbb{P}(S_n = x, S_{n+p} - S_n = y) = \mathbb{P}(S_n = x)\,\mathbb{P}(S_{n+p} - S_n = y) > 0$$

donc $x + y \in \Lambda_X \setminus \{0\}$, ce qui prouve la stabilité par addition.

Ensuite, si $r(\Lambda_X \setminus \{0\}) \neq 0$ alors $\Lambda_X \setminus \{0\} \subset d\mathbb{Z}$ pour un certain $d > 0$ et en particulier $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(S_1 \in d\mathbb{Z}) = 1$ en contradiction avec l'hypothèse faite sur X.

c) Appliquer **12b** à $x \mapsto h(-x) - h(0)$.

d) h est continue sur $\mathbb{R}^-$ et tend en $-\infty$ vers sa valeur maximale donc il existe un réel $c \leq 0$ tel que $h(c) = \min(h(t),\ t \leq 0)$. En reprenant **13a**, on prouve que $h(c - x) = h(c)$ pour tout $x \in \Lambda_X$, d'où en faisant tendre x vers $+\infty$ dans Λ_X : $h(c) = h(0)$, c'est-à dire : h est constante sur $\mathbb{R}^-$.

On peut alors appliquer **7b** à la fonction $x \mapsto h(x) - h(0)$ car $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$: cette fonction est nulle et ainsi h est constante sur $\mathbb{R}$.

Q 14.

a) f' étant bornée, la borne supérieure existe et est une fonction de x bornée, décroissante. Une telle fonction admet une limite finie en $+\infty$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver $y_n \geq n$ tel que $|\displaystyle\sup_{t\geq n} f'(t) - f'(y_n)| \leq \frac{1}{n}$.

c) On peut intervertir $\displaystyle\lim_{k\to+\infty,\ t\text{fixé}}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}$ dans la relation $f'(t + t_k) = g'(t + t_k) + \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i f'(t + t_k - x_i)$ car $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i$ est absolument convergente et f' est bornée.

Il vient : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \xi(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i \xi(t - x_i)$ car g' est nulle au delà de K.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f'(x) - f'(y)| \leq \varepsilon$.

Par translation, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |\xi_k(x) - \xi_k(y)| \leq \varepsilon$

puis, par passage à la limite : $|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |\xi(x) - \xi(y)| \leq \varepsilon$. Ainsi ξ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On montre de même qu'elle est bornée et, par construction, elle atteint son maximum en $t = 0$ avec $\xi(0) = c$.

Alors on peut appliquer **13** qui conclut à la constance de ξ.

d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme il y a convergence uniforme sur tout segment, on peut passer à la limite ($k \to +\infty$, a fixé) dans la relation : $|\displaystyle\int_0^a f'(t_k + u)\,\mathrm{d}u| = |f(t_k + a) - f(t_k)| \leq 2\|f\|_{+\infty}$ ce qui donne : $|ca| \leq 2\|f\|_{+\infty}$. Et a est arbitraire, donc $c = 0$.

e) Car $\displaystyle\inf_{u\geq t} f'(u) \leq f'(t) \leq \sup_{u\geq t} f'(u)$.

f) Car $\displaystyle\inf_{u\geq t} f'(u) \leq \frac{f(t+\ell) - f(t)}{\ell} \leq \sup_{u\geq t} f'(u)$ lorsque $\ell > 0$.

Q 15. $\mathbb{E}(N(x, x+\ell)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{[0,\ell]}(x + \ell - S_k)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\ell}{m}$. Le nombre moyen de sommes comprises dans un intervalle donné de longueur ℓ est de l'ordre de la longueur de cet intervalle divisée par l'écart moyen entre deux sommes successives. Cette propriété est manifestement fausse si X est à valeurs dans $d\mathbb{Z}$ et $\ell < d$.