

Équations différentielles linéaires

Dans tout le cours, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un e.v.n. de dimension finie n .

Si f est un endomorphisme de E et v un vecteur de E , on note $f.v$ l'image de v par f , au lieu de la traditionnelle notation $f(v)$. Sans cette notation, on rencontrerait des notations lourdes comme $f(t)(v)$ ou $f(t)(v(t))$, qui seront donc avantageusement remplacées par $f(t).v$ ou $f(t).v(t)$.

1 Équations et systèmes différentiels linéaires du premier ordre

1.1 Généralités

Définition. On appelle équation différentielle linéaire (du premier ordre) toute équation différentielle de la forme

$$x' = a(t).x + b(t)$$

où

- a est une fonction continue de I dans $\mathcal{L}(E)$
- b est une fonction continue de I dans E (appelée second membre)
- x est la fonction inconnue dérivable de I dans E , x' sa dérivée

Définition. Avec les notations précédentes, on appelle solution (sur I) du système différentiel toute application x dérivable sur I et telle que pour tout $t \in I$, $x'(t) = a(t).x(t) + b(t)$.

Remarque. Si le second membre b peut s'écrire sous la forme $b = b_1 + b_2$, alors en additionnant les solutions de l'équation $x' = a(t).x + b_1(t)$ avec celles de l'équation $x' = a(t).x + b_2(t)$, on obtient des solutions de $x' = a(t).x + b(t)$: on appelle cette idée le principe de superposition.

Comme E est de dimension finie n , si on choisit une base $\mathcal{B}$, alors en exprimant les coordonnées des vecteurs et les matrices des endomorphismes dans la base $\mathcal{B}$, on obtient une traduction matricielle de l'équation différentielle précédente.

Définition. On appelle système différentiel linéaire (du premier ordre) toute équation différentielle de la forme

$$X' = A(t)X + B(t)$$

où

- A est une fonction continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- B est une fonction continue de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$
- X est la fonction inconnue dérivable de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, X' sa dérivée

Exemples.

- Le système $\begin{cases} x' &= 2x + 3y \\ y' &= -x + 4y \end{cases}$ est un système différentiel linéaire

où A est la fonction constante égale à $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = 0$

- Le système $\begin{cases} x' &= t^2x + e^ty + \sin t \\ y' &= -tx + \cos t y - 1 \end{cases}$ est un système différentiel linéaire

où A est la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 & e^t \\ -t & \cos t \end{pmatrix}$ et B est la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ -1 \end{pmatrix}$.

Définition. Avec les notations précédentes, on appelle solution (sur I) du système différentiel toute application X dérivable sur I et telle que pour tout $t \in I$, $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Proposition 1. Les solutions d'une telle équation différentielle ou d'un tel système différentiel linéaire sont au moins de classe C^1 sur I .

À partir de maintenant, le cours portera sur les équations différentielles, mais tout ce qui sera énoncé à leur propos restera valable pour les systèmes différentiels.

1.2 Problème de Cauchy

Définition. Soit $(*) : x' = a(t).x + b(t)$ une équation différentielle linéaire qui respecte les conditions ci-dessus. On choisit un réel $t_0 \in I$ et un vecteur $v_0 \in E$.

Le problème d'existence et d'unicité d'une solution de $(*)$ qui satisfait la condition initiale $x(t_0) = v_0$ est appelé un problème de Cauchy.

Le problème de Cauchy

$$(1) : \begin{cases} x' &= a(t).x + b(t) \\ x(t_0) &= v_0 \end{cases}$$

est équivalent au problème intégral

$$(2) : x(t) = \int_{t_0}^t (a(\tau).x(\tau) + b(\tau)) \, d\tau + v_0$$

i.e. x est solution de (1) si et s.si x est solution de (2).

1.3 Équation différentielle linéaire homogène

Définition. On appelle équation différentielle linéaire (du premier ordre) toute équation différentielle de la forme

$$x' = a(t).x$$

où a est une fonction continue de I dans $\mathcal{L}(E)$.

Il y a un seul résultat à connaître sur de tels systèmes : le théorème de Cauchy-Lipschitz ou théorème de Cauchy linéaire.

Théorème 1. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène $x' = a(t).x$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Plus précisément, en notant S l'ensemble des solutions, pour tout $t_0 \in I$, l'application

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, pour tout $t_0 \in I$ et $v_0 \in E$ (appelé vecteur des conditions initiales), il existe une unique solution telle que $x(t_0) = v_0$.

La conjonction d'une équation différentielle et d'une condition initiale s'appelle un problème de Cauchy linéaire. Ce qui précède signifie que n'importe quel problème de Cauchy linéaire possède une unique solution.

Une base de l'ensemble des solutions est appelé un système fondamental de solutions.

Exercices :

- 1) Montrez que les fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} -t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}$ est un système fondamental de solutions du système

$$\text{diff. sur } \mathbb{R}_+^* \begin{cases} x' &= \frac{1}{t}x - y \\ y' &= x + \frac{1}{t}y \end{cases}$$

- 2) Déterminez un système fondamental de solutions polynomiales du système diff.
$$\begin{cases} x' &= \frac{t}{1+t^2}x + \frac{1}{1+t^2}y \\ y' &= \frac{-1}{1+t^2}x + \frac{t}{1+t^2}y \end{cases}$$

1.4 Cas général

Proposition 2. Soit $x' = a(t).x + b(t)$ un système différentiel linéaire sur l'intervalle I .

Si on connaît une solution p dite particulière du système, alors on connaît la forme générale des solutions : elles sont toutes de la forme

$$t \mapsto g(t) + p(t)$$

où g est la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène associée.

Autrement dit, l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}) : p + S$ où S est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est encore valable sous une forme amenuisée.

Théorème 2. Pour tout $t_0 \in I$ et $v_0 \in E$ (appelé vecteur des conditions initiales), il existe une unique solution telle que $x(t_0) = v_0$.

Remarque. Il n'existe pas de méthode simple pour résoudre concrètement de tels systèmes différentiels linéaires, à part dans le cas où A est une constante.

2 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

2.1 Définition

Proposition 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La série $\sum_{k \geq 0} \frac{u^k}{k!}$ converge absolument dans E .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition. Avec les mêmes hypothèses,

on pose $\exp(u) = e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$ et $\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Il est bien sûr évident que si u a pour matrice A dans une base $\mathcal{B}$, alors e^u a pour matrice e^A dans cette même base.

2.2 Propriétés algébriques

L'exponentielle d'endomorphismes ou de matrices a de nombreuses propriétés communes avec l'exponentielle de nombres, mais pas toutes, car les algèbres $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas commutatives.

Proposition 4. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, u et e^u commutent. De même avec les matrices.

Proposition 5. Soit u, v deux endomorphismes de E qui commutent ($uv = vu$). Alors $e^{u+v} = e^u e^v = e^v e^u$. De même avec des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

Attention ! Sans hypothèse de commutation, ce résultat est faux en général.

Une conséquence immédiate est que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, e^u est inversible (donc non nul) et son inverse est e^{-u} . De même pour les matrices.

Si A et B sont semblables, alors e^A et e^B le sont aussi avec la même matrice de passage : si $B = P^{-1}AP$, alors $e^B = P^{-1}e^A P$.

En général, il est difficile de calculer une exponentielle d'endomorphisme ou de matrice. Deux cas simples :
 — Dans le cas diagonalisable, c'est faisable, car l'exponentielle d'une matrice diagonale est très simple.

Proposition 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
 Alors e^A est diagonale de diagonale $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

— Si une matrice A est nilpotente, alors son exponentielle est en fait un polynôme en A .

Dans le cas général, le calcul est souvent pénible. Néanmoins, on a quelques résultats généraux simples.

Proposition 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ scindée.
 Alors $\text{Sp}(e^A) = e^{\text{Sp } A}$. En particulier, $\det e^A = e^{\text{tr } A}$.

2.3 Propriétés fonctionnelles

La convergence absolue de la série définissant l'exponentielle entraîne quelques résultats simples à propos de la continuité et de la dérivabilité.

Proposition 8. La fonction $u \mapsto e^u$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$. De même, $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 9. Soit $u \in L(E)$. Alors la fonction de variable réelle $t \mapsto e^{t \cdot u}$ est dérivable et sa dérivée est $t \mapsto u e^{t \cdot u} = e^{t \cdot u} u$.

3 Équations linéaires homogènes à coefficients constants

3.1 Forme générale de la solution

Proposition 10. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ (a est un endomorphisme constant), $t_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in E$.
 Alors l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x' &= a \cdot x \\ x(t_0) &= v_0 \end{cases}$ est la fonction $t \mapsto e^{(t-t_0)a} \cdot v_0$.

On a bien sûr l'équivalent matriciel.

Proposition 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (A est une matrice constante), $t_0 \in \mathbb{R}$ et $V_0 \in \mathbb{K}^n$.
 Alors l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} X' &= A \cdot X \\ X(t_0) &= V_0 \end{cases}$ est la fonction $t \mapsto e^{(t-t_0)A} V_0$.

3.2 Cas praticable

Proposition 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable : on note $a_1, \dots, a_n$ les valeurs propres non distinctes de A et $(V_1, \dots, V_n)$ une base de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres associés.

Alors les solutions du système différentiel linéaire homogène $X' = AX$ sont les fonctions

$$t \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{a_i t} V_i$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des constantes quelconques (appelées constantes d'intégration).

En pratique on diagonalise la matrice A en donnant une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, on pose $X = PY$ et on résout le système différentiel $Y' = DY$, ce qui donne la forme générale de Y puis celle de $X = PY$. Ce qui est remarquable, c'est qu'il est inutile de calculer l'inverse de P .

Quand la matrice A n'est pas diagonalisable, mais seulement trigonalisable, alors en notant T une matrice triangulaire semblable à A , la même stratégie peut être appliquée, moyennant une résolution un peu plus difficile du système différentiel $Y' = TY$.

Exercices :

- 3) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$
- 4) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -2x - y + 7z \\ y' = 5x + 4y - 8z \\ z' = x + y + z \end{cases}$

Dans la suite, on s'intéresse à d'autres types d'équations différentielles linéaires, où les inconnues sont à valeurs réelles ou complexes.

4 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

4.1 Généralités

Définition. On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n toute équation différentielle de la forme

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)$$

où $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ sont $n + 1$ fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et y est la fonction inconnue de I dans $\mathbb{K}$.

Définition. Avec les notations précédentes, on appelle solution (sur I) de l'équation différentielle toute application f n fois dérivable sur I et telle que pour tout $t \in I$,

$$f^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) + b(t).$$

Exemples.

- $y'' - (t+1)y' + ty = 0$ a pour solution sur $\mathbb{R}$ la fonction exp.
- $y'' + \frac{1}{t}y' + 4t^2y = 1 + t^4$ a pour solution sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $t \mapsto \cos(t^2) + \frac{t^2}{4}$.

Proposition 13. Les solutions d'une telle équation différentielle linéaire sont au moins de classe C^n sur I .

4.2 Représentation matricielle

On considère une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

$$(1) : y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)$$

On pose $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$.

On définit ainsi trois fonctions vectorielles (matricielles) $X \in C^n(I, \mathbb{K}^n)$, $A \in C^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$.

L'équation (1) est alors équivalente au système différentiel $X' = AX + B$.

Par conséquent, tous les résultats précédents sont applicables dans ce cas particulier.

4.3 Équation différentielle linéaire homogène

Définition. On appelle équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n toute équation différentielle de la forme

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y$$

où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont n fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et y est la fonction inconnue de I dans $\mathbb{K}$.

Là encore, il y a un seul résultat à connaître sur de telles équations : le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 3. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

Plus précisément, en notant S l'ensemble des solutions, pour tout $t_0 \in I$, l'application

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ f &\longmapsto (f(t_0), f'(t_0), \dots, f^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, pour tout $t_0 \in I$ et $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ (appelé vecteur des conditions initiales), il existe une unique solution telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f^{(k)}(t_0) = v_k$.

Là encore, toute base de l'ensemble des solutions est appelée système fondamental de solutions. Il n'y a hélas pas de méthode générale pour en calculer un concrètement.

4.4 Cas général

Proposition 14. Soit (1) : $y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)$ une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n sur l'intervalle I .

Si on connaît une solution p dite particulière de l'équation, alors on connaît la forme générale des solutions : elles sont toutes de la forme

$$t \mapsto g(t) + p(t)$$

où g est la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène associée.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est encore valable sous une forme amenuisée.

Théorème 4. Pour tout choix des conditions initiales $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} &= a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \\ y(t_0) &= v_0 \\ y'(t_0) &= v_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) &= v_{n-1} \end{cases}$$

possède toujours une unique solution.

Remarque. La recherche d'une solution particulière est un problème difficile. Sauf cas évidents, des indications seront données.

4.5 Diverses idées pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre n

En pratique, $n = 2 \dots$

- Chercher des solutions sous une forme *a priori* raisonnable (polynomiale, exponentielle, etc).
- Chercher des solutions développables en série entière.
- Faire un changement de variable ou un changement de fonction inconnue en suivant les indications de l'énoncé.
- Quand on connaît une solution non nulle z , en chercher une autre sous la forme $u \times z$ où u est une fonction inconnue à déterminer (c'est la méthode de variation de la constante!), qui transforme le problème différentiel d'ordre n en un problème d'ordre $n - 1$ plus une intégration.

Exercices :

- 5) Résolvez l'équation différentielle suivante sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$: $(2t+1)y''(t) + (4t-2)y'(t) - 8y(t) = 0$,
en cherchant une solution polynomiale et une solution exponentielle.
- 6) Même exercice sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $t^2(1+t)y''(t) - t(2+t)y'(t) + (2+t)y(t) = 0$,
en cherchant une première solution sous forme $y(t) = t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 7) Même exercice sur $\mathbb{R}$ avec : $(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 1$,
en cherchant des solutions développables en série entière.
- 8) Même exercice sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $t^2y''(t) + 4ty'(t) - (t^2-2)y(t) = e^t$,
en effectuant le changement de fonction inconnue : $z(t) = t^2y(t)$.

Dans le cas $n = 2$, pour trouver une solution particulière de l'équation $y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$, si on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée $y'' = a(t)y' + b(t)y$, alors on peut parfois réussir à trouver une solution particulière par variations **des** constantes :

en notant (s_1, s_2) un système fondamental de solutions de l'équ. homogène, on pose $p = u_1s_1 + u_2s_2$ où u_1 et u_2 sont deux fonctions inconnues deux fois dérivables.

Comme on a deux inconnues pour une seule équation, on impose une condition supplémentaire : $u_1's_1 + u_2's_2 = 0$, afin que la recherche de solutions particulières aboutisse au système suivant :

$$\begin{cases} u_1's_1 + u_2's_2 &= 0 \\ u_1's_1' + u_2's_2' &= c \end{cases}$$

Comme dans le cas de la méthode de variation de la constante vue en MP2I, la détermination explicite de u_1 et u_2 est parfois empêchée par les calculs de primitives non explicites.

Exercices :

- 9) Résolvez l'équation $y'' + 3y' + 2y = \frac{t-1}{t^2}e^{-t}$ sur $]0, +\infty[$.
- 10) Résolvez l'équation $y'' + 4y = \tan t$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.