

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Résolvez les équations différentielles suivantes sur les intervalles indiqués :

- a) $xy' + y = \sin x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ b) $ty' - 2y = t$ sur $\mathbb{R}_-^*$
 c) $xy' + (x-1)y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d) $(1+t^2)y' + ty = 1 + 2t^2$ sur $\mathbb{R}$
 e) $(x^2-1)y' + xy = x^3$ sur $] -1, +1[$ f) $(x-1)y' + xy = \sin x$ sur $] -\infty, 1[$

***2)** Même exercice :

- a) $(x+5)(x-3)y' + (x+13)y = 1 + \frac{5}{x}$ sur $]3, +\infty[$ b) $(x+1)^2y' - (3x+4)y = 3(x+1)^3$ sur $] -\infty, -1[$.
 c) $(x^2-2x+1)y' + xy = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ sur $[1, +\infty[$ d) $x(x-1)y' - (3x-1)y = -x^2(x^2+1)$ sur $]0, 1[$

****3)** Déterminez, s'il en existe, les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes (équations avec raccords) :

- a) $xy' - 2y = -x$ b) $xy' + y = \sin x$ c) $xy' - y = \frac{x}{1+x^2}$
 d) $(1-x^2)y' + 2y = (x-1)^2$ e) $(x-1)(x-2)y' - y = x$

***4)** Résolvez les systèmes différentiels suivants :

- a) $\begin{cases} x' &= 4x - 2y \\ y' &= x + y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= -x \\ z' &= x + y + z \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= -1 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} x' &= x - y + \frac{1}{\cos t} \\ y' &= 2x - y \end{cases}$ sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ d) $\begin{cases} x' &= tx - y \\ y' &= (2-t)x + y \end{cases}$ (ind : solutions polynômiales)

****5)** Résolvez les systèmes différentiels suivants :

- a) $\begin{cases} x' &= 4x + y + 2z \\ y' &= 4x + 2y + 2z \\ z' &= -4x - 2y - 2z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' &= -x + y + z \\ y' &= x - y - z \\ z' &= x - y - 3z \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' &= -4x + 8y + 22z \\ y' &= -2x + 3y + 4z \\ z' &= -x + 2y + 7z \end{cases}$
 d) $\begin{cases} x' &= y + 2z \\ y' &= 2x + y - z \\ z' &= -2x - y - z \end{cases}$ e) $\begin{cases} x' &= 2y + 2z \\ y' &= -x + 2y + 2z \\ z' &= -x + y + 3z \end{cases}$ f) $\begin{cases} x' &= 2x + z \\ y' &= x - y - z \\ z' &= -x + 2y + 2z \end{cases}$

****6)** Résolvez le système différentiel homogène à coefficients variables :

$$\begin{cases} x'(t) = (t-2)x(t) - (t-1)y(t) \\ y'(t) = 2(t-1)x(t) - (2t-1)y(t). \end{cases}$$

Indication : On pourra présenter le système différentiel sous forme d'équation différentielle vectorielle et réduire la matrice $A(t)$ de ses coefficients.

***7)** Résolvez l'équation différentielle $(1+x^2)y'' - (3x^2-4x+3)y' + (2x^2-6x+4)y = 0$ en faisant le changement de fonction inconnue $z : x \mapsto (1+x^2)y(x)$.

****8)** Résolvez l'équation différentielle $xy'' - y' - 4x^3y = x^3e^{x^2}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z(x) = y(\sqrt{x})$.

****9)**

- a) Soit (a, b, c) trois réels, $a \neq 0$. Montrez que y est solution de l'équation $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $z : t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.
 b) Exemples : résolvez l'équation $x^2y'' - xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$; résolvez l'équation $x^2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 c) Déterminez les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall x > 0 \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

****10)** Résolvez les équations différentielles suivantes en vous aidant des indications fournies :

- a) $y'' + ty' + y = 0$ (chercher des solutions dév. en série entière)
- b) $y'' + ty' + 3y = 0$ (idem)
- c) $ty'' + 2y' - ty = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (idem)
- d) $4ty'' + 2y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (idem)
- e) $ty'' - y' - 4t^3y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (idem)
- f) $t^2y'' + ty' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (changement de variable $t = e^s$)
- g) $ty'' + 2(t+1)y' + 2y = 1 - e^{-2t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (chercher une solution $t \mapsto t^\alpha$ et utiliser la méthode de variation de la constante)

****11) Raccordements de solutions**

Déterminez les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations c, d, e, f de l'exercice précédent.

****12)** On considère la fonction $A: t \mapsto \arcsin^2(t)$.

- a) Sans chercher à calculer ses coefficients, justifiez que la fonction A est développable en série entière sur un intervalle I que l'on précisera.
- b) Montrez que la fonction A est solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in I, \quad (1 - t^2)y''(t) - ty'(t) = 2.$$

- c) Déduisez-en le développement en série entière de A .

****13)** On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad ty'' + y' + ty = 0.$$

- a) Trouvez sous forme d'un DSE l'unique solution J_0 de (E) telle que $J_0(0) = 1$ et $J_0'(0) = 0$.
- b) $\triangleright$ Développez $\cos(t \sin \theta)$ en série entière de t , en l'écrivant sous la forme

$$\cos(t \sin \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\theta),$$

de façon que $u_n(\theta)$ possède dans son expression une puissance de t .

$\triangleright$ Justifiez l'égalité :

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\theta) \, d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi u_n(\theta) \, d\theta.$$

$\triangleright$ Déduisez-en que : $J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta) \, d\theta$.

- c) On veut retrouver d'une autre façon cette expression de J_0 .
- $\triangleright$ Vérifiez, en utilisant des dérivations sous le signe somme, que

$$f: t \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta) \, d\theta$$

vérifie bien (E) .

- $\triangleright$ Montrez qu'il existe $\alpha > 0$ tel que J_0 ne s'annule pas sur $[-\alpha, \alpha]$, puis montrez que $K_0: t \mapsto J_0(t) \int_\alpha^t \frac{1}{sJ_0(s)^2} \, ds$ est aussi solution de (E) sur $]0, \alpha]$.
- $\triangleright$ Justifiez qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda J_0 + \mu K_0$ sur $]0, \alpha]$.
- $\triangleright$ Déduisez-en que $f = J_0$.

****14)** Soit p et q deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose p impaire et q paire, et on considère l'équation différentielle : $(H) \quad y'' + p y' + q y = 0$.

- a) Montrez qu'il existe une unique solution y_1 de (H) telle que : $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ et y_1 est paire.
- b) Même question pour y_2 solution de (H) telle que : $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ et y_2 est impaire.
- c) Montrez que (y_1, y_2) est une base de $\mathcal{S}(H)$ (ensemble des solutions de (H)).

****15)** Montrez, sans chercher à les expliciter à l'aide des fonctions usuelles, que toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - xy = 0$$

sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

****16)** Soit $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Montrez que les solutions de l'équation différentielle

$$y' - a(x)y = 0$$

sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

****17)** Déterminez toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

****18)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée et (H) le système différentiel $X' = AX$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

- a) Si X est une solution de (H) , justifiez que $\|X\|^2$ est une fonction dérivable et calculez sa dérivée.
- b) Montrez que toute solution du système différentiel (H) est de norme constante si et seulement si A est une matrice antisymétrique.

****19)** Soit $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue.

- a) Montrez qu'il existe une unique fonction $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U'(t) = P(t)U(t)$ et $U(0) = I_n$.
- b) Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t)$ est une matrice orthogonale de déterminant 1.

****20)** Soit $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue, $S_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- a) Montrez qu'il existe une unique fonction $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $S(0) = S_0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S'(t) = P(t)S(t) - S(t)P(t)$.
- b) Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ est une matrice symétrique.
- c) Montrez qu'il existe une application $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(t) = U(t)S_0U(t)^T$ (indication : utiliser l'exercice précédent).

****21)** Soit $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dérivable et $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$.

- a) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^k)' = A^k B - B A^k$.
- b) Montrez que le spectre de A est constant.

****22)** Soit $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle.

- a) Montrez que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + p(t)y = 0$ s'annule en au moins un point.
- b) Soit y une solution de l'équation différentielle $y'' - p(t)y = 0$ autre que la fonction nulle.
Montrez que y et y' s'annulent au plus une fois.

Indication : calculez l'intégrale $\int_a^b p(t)y^2(t) dt$ et étudiez les conséquences d'une annulation de y en a et en b .

****23)** Déterminez toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(-x) = e^x$.

****24)** Soit k un réel. Déterminez les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(k-x)$.

****25)** Déterminez les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt + \cos x$.

****26)** Une équation différentielle non linéaire.

Résolvez l'équation différentielle

$$2te^{y(t)}y'(t) + e^{y(t)} - t^2 = 0$$

à l'aide du changement de fonction inconnue $u = e^y$.

On étudiera avec soin l'ensemble de définition de chaque solution y .