Dans cet exercice, p désigne un réel appartenant à $]0,1[$, $q = 1-p$ et λ un réel strictement positif.

Q 1. Dans cette question, X est une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Désormais, dans les deux questions suivantes, X est une variable aléatoire discrète qui prend une infinité de valeurs dans $]0,+\infty[$ qui forment une suite strictement croissante. On note (x_k) la suite (strictement croissante) des valeurs de X et $F_X : t \mapsto \mathbf{E}(e^{-tX})$ sur $[0,+\infty[$.

Q 2. Exprimer $F_X(t)$ à l'aide des x_k. Montrer que F_X est une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

Q 3. Montrer que F_X est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\,\mathrm{d}t$. Quel est le lien avec $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right)$?

Q 4. Retrouver le résultat de la question 1.

Q 5. Justifier que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda e^{-t}-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q 6. Dans cette question, X est une variable aléatoire telle que $X-1$ suive la loi de Poisson de paramètre λ.

En vous servant de X, donner la valeur de I.

Exercice hebdomadaire 15 - Corrigé

Q 1. $1/X$ est à valeurs dans $[0,1]$ donc est bornée : elle admet donc une espérance finie.

Donc d'après le th. de transfert, $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^{k-1}}{k}$.

On reconnaît le d.s.e. de la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$. Donc $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = -p\ln(1-q) = -p\ln p$.

Q 2. Pour tout $t \geqslant 0$, la variable aléatoire e^{-tX} est à valeurs dans $[0,1]$ donc est bornée : elle admet une espérance finie.

Donc d'après le th. de transfert, $F_X(t) = \mathbf{E}(e^{-tX}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-tx_k}\mathbb{P}(X = x_k)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geqslant 0$, $|e^{-tx_k}\mathbb{P}(X = x_k)| \leqslant \mathbb{P}(X = x_k)$ et la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X = x_k)$ converge (sa somme vaut 1 puisque les événements $\{X = x_k\}$ forment un système complet d'événements).

En posant $f_k : t \mapsto e^{-tx_k}\mathbb{P}(X = x_k)$, ceci prouve que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.

Comme toutes ces fonctions sont continues sur $[0,+\infty[$, on en déduit que F_X l'est aussi.

Q 3. La suite (x_k) est croissante, donc pour tout $t \in [0,+\infty[$,

$$0 \leqslant F_X(t) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-tx_0}\mathbb{P}(X = x_k) = e^{-tx_0}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_k) = e^{-tx_0}.$$

Comme $x_0 > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-tx_0}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc par comparaison des fonctions positives, F_X l'est aussi.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{P}(X = x_k)\int_0^{+\infty} e^{-tx_k}\,\mathrm{d}t = \mathbb{P}(X = x_k)\frac{1}{x_k} \leqslant \frac{1}{x_0}\mathbb{P}(X = x_k)$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, la série des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

D'après le th. d'intégration terme à terme, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} F_X(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x_k}\mathbb{P}(X = x_k)$$

On reconnaît là l'expression de $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ grâce au th. de transfert (ce qui précède justifiant la sommabilité requise par ce théorème).

Q 4. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors

$$F_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}e^{-kt} = pe^{-t}\sum_{k=1}^{+\infty}(qe^{-t})^{k-1} = \frac{pe^{-t}}{1-qe^{-t}}$$

donc

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{pe^{-t}}{1-qe^{-t}} = \left[\frac{p}{q}\ln(1-qe^{-t})\right]_{t=0}^{+\infty} = -p\ln(1-q) = -p\ln p$$

Q 5. La fonction $g : t \mapsto e^{\lambda e^{-t}-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant e^{\lambda e^{-t}-t} \leqslant e^{\lambda-t} = e^{-\lambda}e^{-t}$. Donc par comparaison de fonctions positives, g est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Q 6. Pour $t \geqslant 0$, $F_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-kt} = e^{-\lambda}e^{-t}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-(k-1)t} = e^{-\lambda}e^{-t}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{-t})^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}e^{-t}e^{\lambda e^{-t}}$.

D'après ce qui précède, $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\,\mathrm{d}t = e^{-\lambda}I$.

Or $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1)$.

Conclusion :

$$I = \frac{e^{\lambda}-1}{\lambda}$$