**Q 1.** Calculer quand on le peut la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$.

**Q 2.** Montrer que l'équation $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)x^k = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une unique solution qu'on note $\alpha$. Vérifier alors que la suite $(i(i+1)\alpha^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$, notée $\mathscr{A}$.

Une expérience aléatoire se déroule en deux étapes.

— Un opérateur choisit un entier $i$ dans $\mathbb{N}^*$ selon la distribution de probabilités $\mathscr{A}$. Puis il remplit une urne avec 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., $i$ boules numérotées $i$.

— L'opérateur vous confie alors l'urne et vous y prélevez alors une boule.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $A_i$ l'événement « l'entier $i$ a été choisi par l'opérateur » et $B_i$ l'événement « vous obtenez la boule n° $i$ lors de la deuxième étape ».

Dans toute la suite, les résultats des calculs seront écrits sous la forme $\varphi(\alpha)$ où $\varphi$ est une fraction rationnelle irréductible dont le dénominateur est de degré au maximum 2.

**Q 3.** Soit $(i,k) \in \mathbb{N}^{*2}$. Donner la valeur de $\mathbb{P}_{A_i}(B_k)$.

**Q 4.** Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(B_k)$.

**Q 5.** On note $C$ l'événement « la boule tirée porte un numéro pair ». Calculer $\mathbb{P}(C)$.

**Q 6.** On note $D$ l'événement « le numéro de la boule tirée est inférieur ou égal à la moitié du nombre choisi à la première étape ». Calculer $\mathbb{P}(D)$.

**Exercice hebdomadaire 14 - Corrigé**

**Q 1.** La série entière $\sum_{k\geqslant 0} kx^k$ a pour rayon de convergence 1 et diverge grossièrement quand $x=1$ ou $x=-1$. On peut donc la calculer uniquement pour $x\in\,]-1,1[$.

Dans l'ouvert de convergence $]-1,1[$, la série entière est de classe $C^\infty$ et est dérivable et intégrable terme à terme.

Or pour tout $x\in\,]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Donc pour tout $x\in\,]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

**Q 2.** De même, pour tout $x\in\,]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Donc pour tout $x\in\,]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)x^k = x^2\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=0}^{+\infty} 2kx^k = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}$.

L'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)x^k = 1$ est donc définie sur $]-1,1[$ et est équivalente à l'équation $(1-x)^3-2x=0$.

La fonction $x\mapsto(1-x)^3-2x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, continue et prend la valeur 1 en 0 et $-2$ en 1, donc d'après le th. de la valeur intermédiaire, elle possède une unique solution, qui se trouve dans l'intervalle $[0,1]$.

La suite $(i(i+1)\alpha^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est alors une suite de réels positifs sommable et de somme 1, donc elle est une distribution de probabilités discrètes.

**Q 3.** Si l'événement $A_i$ est réalisé, alors l'urne contient les boules de 1 à $i$ et contient $\dfrac{i(i+1)}{2}$ boules, donc comme on peut supposer encore les tirages équiprobables dans cette urne, on obtient donc : pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{A_i}(B_k) = \dfrac{2k}{i(i+1)}$ si $k\in[\![1,i]\!]$ et $\mathbb{P}_{A_i}(B_k)=0$ si $k>i$.

**Q 4.** La famille d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on obtient

$$\mathbb{P}(B_k) = \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}_{A_i}(B_k)\times\mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty}P_{A_i}(B_k)\times i(i+1)\alpha^i = \sum_{i=k}^{+\infty}\frac{2k}{i(i+1)}\times i(i+1)\alpha^i = 2k\sum_{i=k}^{+\infty}\alpha^i = \frac{2k\alpha^k}{1-\alpha}.$$

**Q 5.** $C = \displaystyle\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_{2k}$ donc

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4k\alpha^{2k}}{1-\alpha} = \frac{4}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}k(\alpha^2)^k = \frac{4}{1-\alpha}\times\frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} = \frac{4\alpha^2}{(1-\alpha)^3(1+\alpha)^2} = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2}\times\frac{2\alpha}{(1-\alpha)^3} = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2}.$$

**Q 6.** $D$ est l'événement « le numéro de la boule tirée est inférieur ou égal à la moitié du nombre choisi à la première étape » donc

$$D = \bigsqcup_{1\leqslant k\leqslant\frac{i}{2}}(A_i\cap B_k) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}\bigsqcup_{i=2k}^{+\infty}(A_i\cap B_k) \text{ donc}$$

$$\mathbb{P}(D) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=2k}^{+\infty}\mathbb{P}(A_i\cap B_k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=2k}^{+\infty}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B_k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=2k}^{+\infty}i(i+1)\alpha^i.\frac{2k}{i(i+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(2k\sum_{i=2k}^{+\infty}\alpha^i\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(2k\frac{\alpha^{2k}}{1-\alpha}\right) = \frac{2}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}k(\alpha^2)^k = \frac{1}{2}\mathbb{P}(C) = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}.$$