

Probabilités

1 Dénombrabilité

1.1 Vocabulaire

Définition. On dit qu'un ensemble E est dénombrable quand il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E .

Dans ce cas, cela signifie qu'on peut numéroter les éléments de E par les entiers naturels et donc qu'on peut écrire E en extension sous une forme $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sans jamais répéter deux fois le même élément : on dit qu'on a énuméré les éléments de E .

Un ensemble fini est de la forme $\{x_0, \dots, x_n\}$: on peut aussi l'écrire sous la forme $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en répétant une infinité de fois au moins un élément. C'est pourquoi on voit souvent dans les raisonnements apparaître la locution « ensemble fini ou dénombrable » ou « au plus dénombrable ».

Évidemment, tout ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est aussi dénombrable, car une composée de bijections est une bijection.

1.2 Exemples

Proposition 1.

- $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$, plus généralement $[n_0, +\infty[\cap \mathbb{N}$ (pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$), et encore plus généralement toute partie infinie de $\mathbb{N}$ sont dénombrables
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable
- pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable
- si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de complexes, alors le support de la famille $\{i \in I \mid u_i \neq 0\}$ est dénombrable

En revanche, il existe des ensembles infinis non dénombrables, comme $\mathbb{R}$ ou tout intervalle de longueur non nulle. Un ensemble non dénombrable est trop gros pour qu'on puisse ordonner ses éléments et les numéroter.

1.3 Quelques propriétés

Proposition 2. Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Si E est dénombrable, alors pour toute injection de F dans E , F est au plus dénombrable.

Pourvu qu'on ne considère pas trop d'ensembles, les réunions d'ensembles dénombrables le sont aussi.

Proposition 3. Si $E_1, \dots, E_n$ sont (au plus) dénombrables, alors $E_1 \cup \dots \cup E_n$ l'est aussi

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille (au plus) dénombrable d'ensembles (au plus) dénombrables, alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ l'est aussi.

En revanche, pour les produits cartésiens, il faut se contenter d'un nombre fini d'ensembles.

Proposition 4. Si $E_1, \dots, E_n$ sont dénombrables, alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est dénombrable.

En revanche, un produit cartésien quelconque d'ensembles dénombrables ne l'est pas en général : par exemple, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

2 Espace probabilisé

2.1 Univers d'une expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît les résultats possibles (les issues possibles) mais dont on ne peut connaître à l'avance le résultat. On modélise l'expérience par la donnée de l'ensemble Ω des issues possibles.

Définition. L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles (ou univers). Il est souvent noté Ω .

Exemples.

- On jette un dé non truqué : les issues possibles sont les 6 entiers $1, \dots, 6$, l'univers est donc $\Omega = \{1, \dots, 6\}$;
- On jette n fois un dé : les issues possibles sont les suites de n entiers de l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$, donc $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^n$;
- On lance une pièce une infinité de fois : les issues possibles sont les suites infinies de 0 ou 1 : $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

2.2 Tribu d'événements

De manière informelle, un événement est une partie de l'univers Ω . Mais cette définition est trop vague. Si on autorise toutes les parties de l'univers à être des événements, alors quand l'ensemble Ω est infini non dénombrable, alors les seules probabilités sur Ω sont des probabilités discrètes (th. d'Ulam), ce qui exclut tout un tas de probabilités intéressantes. Donc on doit en général restreindre la notion d'événement à certaines parties de Ω : certaines parties n'ont donc pas le droit d'être nommées « événement ».

Définition. Soit Ω un ensemble, appelé univers.

On appelle tribu sur Ω une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que

- $\Omega \in \mathcal{T}$
- pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\bar{A} \in \mathcal{T}$ ($\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω)
- pour toute suite $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir l'univers et une tribu : les éléments d'une tribu sont appelés les événements. On dit qu'un événement est réalisé quand l'issue de l'expérience aléatoire appartient à cet événement. Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace probabilisable.

Exemples.

- L'ensemble $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu, c'est la plus petite tribu envisageable. Elle est inutilisable en pratique car elle ne comporte pas assez d'événements pour décrire des situations issues de la vie réelle (à part peut-être l'expérience aléatoire « Nadal gagne Roland-garros » !)
- L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu : quand l'univers Ω est fini ou dénombrable, c'est la tribu utilisée systématiquement, mais quand Ω est infini non dénombrable, c'est une tribu trop grosse pour pouvoir y définir une probabilité vraiment utile.
- En École d'ingénieurs, vous entendrez parler de la tribu des boréliens : c'est celle couramment utilisée quand $\Omega = \mathbb{R}$.

Proposition 5. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω .

Alors

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- pour toute suite $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.
- pour toute famille finie $(A_1, \dots, A_n)$ d'événements, $\bigcup_{k=0}^n A_k$ et $\bigcap_{k=0}^n A_k$ sont des événements.

Définition. Ω est appelé l'événement certain, $\emptyset$ est appelé l'événement impossible.

Deux événements A et B sont dits incompatibles quand ils sont disjoints, i.e. $A \cap B = \emptyset$.

2.3 Probabilité

Définition. Soit Ω un univers, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω .

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$ telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- pour toute suite $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, alors la série de terme général (positif) $\mathbb{P}(A_n)$ est convergente et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

En pratique, sauf dans certains cas où Ω est fini ou dénombrable, nous postulons toujours l'existence d'un espace probabilisé qui modélise la situation, car c'est hors de notre portée de construire concrètement un tel univers. Dès que les expériences aléatoires peuvent avoir une infinité non dénombrable de résultats possibles, il est souvent difficile de reprendre les idées développées en Première Année et définir par exemple des probabilités à partir d'événements élémentaires $\{\omega\}$ (définir Ω est en général à notre portée, mais construire la tribu et la probabilité est inaccessible à nos moyens). Nous admettrons donc toujours l'existence d'un espace probabilisé représentant notre expérience.

Dans moults cas, nous définirons les événements à partir d'événements « primitifs » : par exemple, dans le cas d'une suite de lancers de pièce, l'univers est simple : $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, mais il n'est pas dénombrable, les événements primitifs sont les événements P_i où $i \in \mathbb{N}$ et

$$P_i = \{\omega = (\omega_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} / \omega_i = 1\}$$

modélise l'événement au sens concret « obtenir *pile* au i -ème lancer ».

Exercices :

- 1) On lance une pièce une infinité de fois. Exprimez par une phrase ce que représente les événements suivants :

$$A_n = \bigcap_{i=0}^n P_i, \quad B_n = \bigcup_{i=0}^n \left(P_i \cap \bigcap_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \overline{P_j} \right), \quad C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq i} P_j.$$

Réciproquement, définissez à l'aide des P_i les événements suivants :

- on obtient *pile* un nombre fini de fois ;
- on obtient *pile* une infinité de fois.

2.4 Propriétés

On retrouve les propriétés vues en Première Année.

Proposition 6. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors $\mathbb{P}$ vérifie les propriétés suivantes :

- ▷ pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; en particulier $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- ▷ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- ▷ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;
- ▷ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;

Mais on en a d'autres, liées à la notion de suite dénombrable.

a) Continuité

Proposition 7 (Continuité croissante). Si (A_n) est une suite croissante d'événements, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Proposition 8 (Continuité décroissante). Si (A_n) est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Proposition 9. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite quelconque d'événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^N A_n\right).$$

Exercices :

2) On considère l'univers des suites infinies de lancers indépendants d'une pièce équilibrée : $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Montrez que les événements élémentaires $\{\omega\}$ sont de probabilité nulle. Déduisez-en que l'univers n'est pas dénombrable.

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre fini de *face* ?

b) Sous-additivité

Proposition 10 (Sous-additivité). Si (A_n) est une suite d'événements alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Dans ce résultat, le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ signifie $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(A_n)$: c'est un réel si la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente, et $+\infty$ sinon (puisque la série est à termes positifs).

c) Événements négligeables ou presque sûrs

Définition. Un événement est dit négligeable quand sa probabilité est nulle.

Un événement est dit presque sûr quand sa probabilité est 1.

Proposition 11. Toute réunion ou intersection au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Toute réunion ou intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûr.

2.5 Probabilité discrète

Définition. Soit Ω un univers.

On appelle distribution de probabilité discrète sur Ω toute famille de réels positifs indexée par Ω , sommable et de somme totale 1.

Si Ω est un ensemble fini, on retrouve la définition de l'an dernier.

Proposition 12. Si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilité discrète sur Ω , alors son support $\{\omega \in \Omega / p_\omega > 0\}$ est au plus dénombrable.

À toute distribution de probabilités discrète sur Ω , on peut associer une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Proposition 13. Si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilité discrète sur Ω , alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

Quand l'univers est infini non dénombrable, le résultat précédent donne toutes les probabilités discrètes sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Mais si on choisit des tribus plus petites (ce qui est très relatif : en général ce sont des ensembles énormes, dont la puissance dépasse celle du continu !), alors on peut créer d'autres types de probabilités (comme les probabilités dites continues).

Quand l'univers Ω est fini ou dénombrable, alors toutes les probabilités sont discrètes : on choisit toujours la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, ce qui est toujours sous-entendu.

Proposition 14. Soit Ω un ensemble fini $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Alors pour tout n -uplet $(p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Proposition 15. Soit Ω un ensemble dénombrable $\{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$.

Alors pour toute suite $(p_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} p_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Exercices :

- 3) Déterminez l'unique constante λ telle qu'on puisse définir une probabilité sur $\mathbb{N}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n!}$.

Dans toute la suite, on suppose donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Généralités

Définition. Soit A un événement non négligeable.

Pour $B \in \mathcal{F}$, on pose $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, appelé probabilité sachant A de B .

On voit aussi la notation $\mathbb{P}(B|A)$, mais attention, cette notation est trompeuse, elle peut laisser penser qu'il existe un événement qui s'appellerait « B sachant A », ce qui n'a aucun sens.

L'idée derrière la notion de probabilité conditionnelle est que lorsqu'on dispose d'une information partielle sur le résultat de l'expérience, notre perception des probabilités s'en trouve modifiée.

Théorème 1. Sous les mêmes hypothèses, $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, appelée probabilité conditionnelle relative à A .

En général, on connaît plutôt $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}(A)$, ce qui permet de calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$$

On peut généraliser

Théorème 2 (Formule des probabilités composées).

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_2 \cap A_1}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

En général, on utilise ce résultat lorsque des événements (au sens naturel) se succèdent et que la connaissance de chaque événement permet de déterminer l'état du système.

Exercices :

- 4) On dispose d'une urne contenant 1 boule blanche et n boules noires ($n \geq 1$). On effectue une suite de tirages jusqu'à obtenir la boule blanche en respectant le protocole suivant : si on tire une boule noire, on la remplace par deux boules noires. Calculez la probabilité d'obtenir la boule blanche à l'issue du k -ème tirage et la probabilité de ne jamais tirer la boule blanche.

3.2 Systèmes complets d'événements

Définition. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements si et seulement si

- I est fini ou dénombrable (en pratique on a souvent $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ ou $I = \mathbb{N}$)
- les événements sont deux à deux incompatibles :
pour tout couple $(i, j) \in I^2$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Exemples.

- Si A est un événement, le couple $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
- Si Ω est fini ou dénombrable, la famille de tous les événements élémentaires est un système complet d'événements.

Les systèmes complets d'événements interviennent lorsqu'on est tenté de faire une disjonction de cas : on est dans un cas, ou alors dans un autre, etc mais sans que jamais deux cas soient simultanément possibles.

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

D'une manière générale, dans toute la suite du cours, si on voit apparaître une somme $\sum_{i \in I} \dots$, alors elle signifiera

- une vraie somme quand I est fini,
- une somme d'une famille sommable quand I est infini,
- cas particulier : dans le cas de réels positifs, on peut oublier la condition de sommabilité et prendre les sommes dans $[0, +\infty]$ (c'est presque toujours le cas tant qu'on ne manipule que des probabilités, qui sont des réels positifs).

Définition. Pour définir un système quasi-complet d'événements, on remplace la condition $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ par la condition $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Un système complet d'événements est donc un système quasi-complet.

Réciproquement, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système quasi-complet d'événements, on pose $B = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$: B est alors un événement négligeable et le système d'événements constitué des événements A_i auxquels on ajoute l'événement B est alors un système complet.

Conclusion : à un événement négligeable près, les deux notions sont les mêmes. La suite du cours montre que la différence entre les deux notions n'est pas fondamentale en pratique.

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 3. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements.

Alors pour tout événement B , $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$

Si de plus, tous les événements A_i sont de probabilités non nulles, alors $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i)$.

Si A est un événement négligeable, alors $A \cap B$ l'est aussi : formellement la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ n'est pas définie, alors on lui donne une valeur arbitraire (souvent 0, en fait peu importe) et on accepte quand même l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A) = 0$, car dans ce cas, cette égalité est vraie puisque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = 0$. Avec cette convention, on peut étendre la formule des probabilités totales à tout système quasi-complet.

Théorème 4. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'événements.

Alors pour tout événement B , $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i)$.

Exercices :

- 5) Soit $p \in]0, 1[$. Dans $\mathbb{N}$, on définit la probabilité $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P}(\{n\}) = (1-p)p^n$. Justifiez que ces égalités définissent effectivement une probabilité sur $\mathbb{N}$. On tire un entier N au hasard selon cette probabilité, puis on remplit une urne avec 1 boule noire et N boules blanches, enfin on prélève une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire dans cette expérience ?

3.4 Formule de Bayes

Proposition 16. Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.

Alors $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Cette formule est appelée la formule de probabilité des causes.

On déduit de cela et de la formule des probabilités totales la formule de Bayes.

Théorème 5. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'événements.

Alors pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a $\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}(B)}$.

Remarque. L'énoncé est donné ici dans sa pleine version, mais en pratique, on retrouve la formule à chaque fois en refaisant la démonstration dans le cas qui nous préoccupe.

Exercices :

- 6) Une proportion p d'une population est atteinte d'une maladie donnée (*prévalence* de la maladie) pour laquelle un test de dépistage existe. Appliqué à un individu atteint, le test donne un résultat positif avec probabilité s (*sensibilité* du test). Appliqué à un individu indemne, il donne un résultat négatif avec probabilité s' (*spécificité* du test).

Calculez la probabilité qu'un patient soit effectivement atteint lorsque son test est positif (*valeur prédictive positive*) ; qu'il soit effectivement indemne lorsque son test est négatif (*valeur prédictive négative*).

- 7) Jean-Eudes lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir "pile", il compte le nombre de lancers nécessaires, appelé k , puis il remplit une urne avec k boules numérotées de 1 à k , enfin il tire une boule dans l'urne.

Il nous annonce qu'il a obtenu 1, mais ne nous donne pas la valeur de k . Déterminez la probabilité qu'il n'ait fait qu'un seul lancer de pièces.

4 Indépendance

4.1 Indépendance de 2 événements

Définition. Soit A, B deux événements.

On dit A et B sont indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 17. Si A et B sont indépendants, alors les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants, les événements $\bar{A}$ et B sont indépendants et les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Remarque.

- Attention ! Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles » !
- Le fait que deux événements soient indépendants ou pas n'est pas seulement lié aux événements eux-mêmes, mais dépend aussi de la probabilité. Quand il y a plusieurs probabilités qui sont utilisées (par exemple, des probabilités conditionnelles), il est essentiel de préciser pour quelle probabilité ils sont indépendants.

Proposition 18. Soit A, B deux événements, A non négligeable. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$.

Intuitivement, deux événements sont indépendants si le fait de savoir que l'un des deux est réalisé n'apporte aucune information sur le fait de savoir que l'autre le soit ou non : dans le cas où A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$. Et non pas, comme c'est souvent indiqué dans la littérature, le fait qu'un événement n'influe pas sur un autre ! Mais tout ça n'est que baratin. **Il faut se méfier de l'intuition quand on fait des calculs de probabilités.**

Exercices :

- 8) Une famille a n enfants ($n \geq 2$). Quelle est la probabilité qu'il n'y ait que des enfants du même sexe ? Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 filles ? Montrez que ces deux événements sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

4.2 Indépendance mutuelle

Définition. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements.

On dit les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont (mutuellement) indépendants si et seulement si pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$.

Le résultat précédent peut être généralisé.

Proposition 19. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements (mutuellement) indépendants, alors toute famille d'événements $(C_i)_{i \in I}$ où pour tout $i \in I$, on choisit $C_i = A_i$ ou $C_i = \overline{A_i}$ est aussi une famille d'événements mutuellement indépendants.

Remarque. On s'intéresse rarement (pour ne pas dire jamais !) à des familles d'événements deux à deux indépendants seulement : cette notion n'implique pas l'indépendance mutuelle !

La seule notion vraiment utile est celle-ci, justement !

Remarque. L'indépendance mutuelle d'un grand nombre d'événements est presque toujours une propriété postulée lors de la modélisation et rarement une propriété démontrée car c'est une preuve difficile en général.

On finit par le lemme des coalitions sur les événements.

Théorème 6. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements mutuellement indépendants.

Si l'événement B est le résultat d'opérations ensemblistes parmi (complémentaire, union au plus dénombrable, intersection au plus dénombrable) sur une sous-famille $(A_i)_{i \in J}$ et C est le résultat d'opérations ensemblistes sur la sous-famille complémentaire $(A_i)_{i \in I-J}$, alors B et C sont indépendants.

Ce résultat est admis, car difficile à démontrer dans le cas où I est infini (niveau L3 ou M1). Dans le cas où I est fini, c'est faisable à notre niveau.