VARIABLES ALÉATOIRES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

****1)** Initialement, une urne A contient 2 jetons numérotés 0 et une urne B contient deux jetons numérotés 1. À chaque coup, on échange un jeton pris dans A au hasard et un autre jeton pris dans B au hasard. X_n désigne le nombre de jetons 1 dans l'urne A après n échanges. Déterminez la loi de X_n.

****2)** n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

a) Justifiez que $N(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

b) On note B_i le numéro de la boule tirée au i-ème tirage.
Montrez que pour $k \geqslant 2$, $\{N \geqslant k+1\} = \{N \geqslant k\} \cap \big\{B_k \notin \{B_1, \dots, B_{k-1}\}\big\}$.

c) Que vaut $\mathbb{P}(N \geqslant 2)$? Donnez une relation de récurrence entre $\mathbb{P}(N \geqslant k+1)$ et $\mathbb{P}(N \geqslant k)$.

d) Montrez que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(N \geqslant k+1) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$.

e) Déduisez-en $\mathbb{P}(N = k)$.

f) Montrez que l'espérance de N est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}$.

****3)** Un standard téléphonique effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est $p \in]0, 1[$, indépendamment de ce qui se passe pour les autres. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

a) Déterminez la loi de X, son espérance, et sa variance.

b) Après ces n appels, le standard tente une deuxième fois, dans les mêmes conditions, de contacter les $n-k$ correspondants injoignables la première fois. Soit Y le nombre d'appels aboutis lors de cette deuxième tentative, et $Z = X + Y$.

(i) Déterminez la loi de Y sachant $\{X = k\}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire la loi conjointe de X et Y.

(ii) Montrez que Z suit une loi binomiale que l'on précisera.

****4)** n candidats passent le code. La probabilité de réussite de chaque candidat est p. Si un candidat rate l'examen, il tente sa chance une deuxième fois avec la même probabilité de réussite.

On note X le nombre de candidats ayant réussi au premier coup et Y le nombre de candidats ayant réussi avec 2 tentatives.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Que peut-on dire de $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(Y = i)$?

c) On note Z le nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves. Quelle est la loi de Z ?

****5)** Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires en nombres respectifs b_1 ; n_1 ; b_2 ; n_2 non nuls. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine.

Si l'on obtient une boule blanche (resp. noire), le deuxième tirage se fait dans U_1 (resp. U_2) : au i-ème tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le $(i+1)$-ème tirage se fait dans U_1 (resp. U_2) :

On considère la variable aléatoire X_i définie par : $X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au i-ème tirage et $X_i = 0$ sinon.

a) Donner la loi de X_1 puis de X_2.

b) Calculer $\mathbb{P}(X_{i+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_i = 0)$ et $\mathbb{P}(X_i = 1)$. Faites de même avec $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1)$.

c) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X_i = 0))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Déduisez-en l'expression de $\mathbb{P}(X_i = 0)$ en fonction de i puis celle de $\mathbb{P}(X_i = 1)$.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}(X_i = 0)$ et $\displaystyle\lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}(X_i = 1)$.

****6)** On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées 3 ; 4 ; 5 et 6. On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

a) Quelle est la loi de X_1 ? Calculez son espérance mathématique $\mathbb{E}(X_1)$.

b) Déterminez la loi de X_2.

c) Dans le cas général, quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

d) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n=1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=6)=\frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n=5)$
$\forall k \in \{1,\ldots,5\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\frac{7-k}{6}\mathbb{P}(X_n=k-1)+\frac{k+1}{6}\mathbb{P}(X_n=k+1)$

e) Déduisez-en pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}(X_{n+1})=\frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)+1$
Calculer alors $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)$.

****7)** Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0;1;2;\ldots;n;\ldots$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

a) Donnez la loi de Y_n, $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.

b) Exprimez X_n en fonction de Y_n et n. Déduisez-en $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$, puis la loi de X_n.

c) Soit Z_n la v.a. égale au nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n.

▷ Déterminez $Z_n(\Omega)$.
▷ Montrez que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout $k \geqslant 1$: $\mathbb{P}(Z_n=k)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(Z_{n-1}=k-1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(Z_{n-2}=k-1)$
▷ Déduisez-en une relation entre l'espérance de Z_n, Z_{n-1} et Z_{n-2} pour $n \geqslant 2$.
▷ On pose $u_n=\mathbb{E}(Z_n)-na$. Déterminer un réel a tel que la suite u soit une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Déduisez-en $\mathbb{E}(Z_n)$.

****8)** Soient $a,n \in \mathbb{N}^*$ et $N=an$. On répartit au hasard N boules dans n urnes avec pour chaque boule équiprobabilité du choix de l'urne. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note T_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numéro i est vide et la valeur 0 dans le cas contraire. On note Y_n la variable aléatoire indiquant le nombre d'urnes restant vides après la répartition des N boules et on pose $S_n=\frac{Y_n}{n}$.

a) Donnez la loi, l'espérance et la variance de T_i.

b) Déterminez l'espérance et la variance de S_n ainsi que leurs limites lorsque n tend vers $+\infty$.

****9)** On considère une urne ayant une proportion $p \in]0,1[$ de boules noires et $q=1-p$ de boules blanches. On effectue des tirages avec remise. On considère les événements : N_k « tirer une boule noire au k-ième tirage » et B_k « tirer une boule blanche au k-ième tirage ». On note X la longueur de la première série de tirages de boules de même couleur et Y la longueur de la deuxième série de tirages de boules de même couleur. Par exemple l'événement $\{X=1\}\cap\{Y=2\}$ est l'événement $(N_1\cap B_2\cap B_3\cap N_4)\cup(B_1\cap N_2\cap N_3\cap B_4)$.

a) Déterminez la loi conjointe du couple (X,Y).

b) Déterminez la loi de X, l'espérance de X et montrer que $\mathbb{E}(X)\geqslant 2$.

c) Déterminez la loi et l'espérance de Y.

****10)** On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant 3 jetons numérotés de 1 à 3. On pose Y la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un jeton différent des précédents et Z celle égale au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois le troisième jeton.

a) Déterminez la loi de Y. Donnez son espérance et sa variance.

b) Déterminez la loi conjointe du couple (Y,Z).

c) Déterminez la loi de Z.

****11)** Soit $(p_1,p_2)\in]0,1[^2$ et X, Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathscr{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathscr{G}(p_2)$.

a) Donnez la loi et l'espérance de $\min(X,Y)$.

b) Même question avec $\max(X,Y)$.

****12)** Soit $(a,n)\in \mathbb{N}^{*2}$. On considère an clients qui choisissent au hasard un fournisseur parmi n disponibles. On pose X_i la v.a. égale au nombre de clients du fournisseur i et Y le nombre de fournisseurs sans clients.

a) Déterminez la loi, l'espérance et la variance de X_i.

b) Calculez $\mathrm{Cov}(X_1+\ldots+X_n,X_i)$, puis $\mathrm{Cov}(X_j,X_i)$ et $\mathbb{E}(X_i.X_j)$. Quand $i \neq j$, calculez le coefficient de corrélation de X_i et X_j.

c) Calculez l'espérance et la variance de Y.

****13)** Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie la propriété (C) quand pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X \geqslant n) > 0$.

Pour une telle variable, on pose $x_n = \mathbb{P}_{(X \geqslant n)}(X = n)$ (la suite (x_n) est appelée taux de défaillance de X).

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geqslant n)}$ et $1 - x_n = \dfrac{\mathbb{P}(X \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(X \geqslant n)}$.

b) Dans cette question, Y est une v.a. telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Montrez que Y vérifie la propriété (C) et calculez le taux de défaillance (y_n) associé. La série $\sum y_n$ converge-t-elle ?

c) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0, 1[$ et $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)$. Exprimez la loi de X en fonction des termes de la suite (x_n).

d) Montrez que $X \sim \mathscr{G}(p)$ si et s.si la suite (x_n) est constante égale à p.

e) Déteminer la nature de la série $\sum \ln(1 - x_n)$ puis celle de $\sum x_n$.

f) Soit $(z_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in [0, 1[$ et la série $\sum z_n$ diverge. Montrez qu'il existe une v.a. Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont le taux de défaillance est la suite (z_n).

****14)** Soit $(p_1, p_2) \in \,]0, 1[^2$ et X, Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathscr{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathscr{G}(p_2)$.

a) Calculez la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

b) Soit $Z \sim \mathscr{B}(q)$, indépendante des deux autres. Calculez la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

****15)** Soit Y un v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $|Y| \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = -n) = \mathbb{P}(Y = n)$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & Y & 1 \\ Y & 0 & 1 \\ Y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donnez la loi du rang de A.

b) Calculez la probabilité que A soit diagonalisable.

****16)** Soit X, Y deux v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, admettant un moment d'ordre 2 et telles que $Z = X + Y + 1$ suive la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[$.

a) Déterminez l'espérance et la variance de X en fonction de p.

b) Déterminez la fonction génératrice de X et déduisez-en la loi de X.

****17)** Soit $r > 0$.

a) Montrez que la suite $(p_k) = \left(\displaystyle\int_0^1 r x^{k-1}(1-x)^r \, \mathrm{d}x\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$.

Soit X une v.a. qui suit cette distribution de probabilités.

b) Déterminez r pour que X possède une espérance finie et calculez-la dans ce cas.

****18)** Soit X, Y deux v.a. indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrez que $\mathbb{E}(X/Y) \geqslant 1$.

****19)** Soit X une v.a. réelle positive ayant un moment d'ordre 2 et $a \in \,]0, 1[$. Montrez que $\mathbb{P}(X \geqslant a\mathbb{E}(X)) \geqslant \dfrac{(1-a)^2 \mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.

****20)** Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. qui suivent la loi $\mathscr{G}(p)$.

a) On pose $f : t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, développez la fonction $f^{(n)}$ en série entière en précisant le rayon de convergence. Déduisez-en les d.s.e. des fonctions f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Donnez la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} X_k$.

c) Évaluez $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n}\left(X_k \geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} X_i\right)\right)$.

****21)** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. qui suivent la loi $\mathscr{G}(p)$. On pose $q=1-p$.

Pour $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\geqslant 2$ et $k\geqslant 1$, on pose $A_n=\{X_1<\ldots<X_n\}$, $B_{n,k}=\{X_1<\ldots<X_n, X_1=k\}$, $a_n=\mathbb{P}(A_n)$, $b_{n,k}=\mathbb{P}(B_{n,k})$ et $\pi_n=\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(1-q^j)$.

a) Calculez $\mathbb{P}(X_1=X_2)$ et $\mathbb{P}(X_1<X_2)$.

b) Montrez que pour $n\geqslant 3$ et $k\geqslant 1$, $b_{n,k}=pq^{k-1}\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty}b_{n-1,j}$.

c) Déduisez-en que pour $n\geqslant 2$ et $k\geqslant 1$, $b_{n,k}=\dfrac{1}{\pi_{n-1}}(pq^{k-1})^n q^{\alpha_n}$ où α_n est un entier que vous préciserez.

d) Montrez que pour $n\geqslant 2$, $a_n=\dfrac{1}{\pi_n}p^{\beta_n}q^{\gamma_n}$ où β_n,γ_n sont des entiers que vous préciserez. Donnez un équivalent de a_n quand $n\to+\infty$.

****22)** Soit X, Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X\prec Y$ quand pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X\geqslant n)\leqslant\mathbb{P}(Y\geqslant n)$.

a) Montrez que $X\prec Y$ si et s.si pour toute fonction $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ croissante et bornée, $\mathbb{E}(f(X))\leqslant\mathbb{E}(f(Y))$.

b) Soit X_λ et X_μ deux v.a. de Poisson de paramètres $\lambda,\mu>0$. Montrez que $X_\lambda\prec X_\mu$ si et s.si $\lambda\leqslant\mu$.

c) On suppose X et Y indépendantes et $X\prec Y$. Montrez que $\mathbb{P}(X\leqslant Y)>\dfrac{1}{2}$.

****23)** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher i.i.d. (c'est-à-dire suivant la loi uniforme sur $\{-1,+1\}$). On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$.

a) Déterminez $\mathbb{P}(S_n=0)$ et un équivalent quand $n\to+\infty$.

b) Montrez que pour tout $(n,t)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}(e^{tS_n})\leqslant \mathrm{e}^{\frac{nt^2}{2}}$.

c) Montrez que pour tout $(n,a)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(|S_n|\geqslant a)\leqslant 2\mathrm{e}^{\frac{-a^2}{2n}}$.

****24)** Soit (A_n) une suite d'événements tel que $\sum\mathbb{P}(A_n)$ converge. Écrivez l'événement B « une infinité d'événements A_n sont réalisés ». Montrez que $\mathbb{P}(B)=0$. *Cette question a été déjà posée dans la feuille d'exercices sur les probabilités.*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., centrées et ayant un moment d'ordre 4. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$.

a) Montrez que $\displaystyle\sum\frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4}$ converge.

b) Soit $\varepsilon>0$. Montrez que $\mathbb{P}(|S_n|\geqslant n\varepsilon)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(S_n^4)}{\varepsilon^4 n^4}$.

c) Montrez que l'événement $\left\{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=0\right\}$ est presque sûr.

****25)** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $R_n=\mathrm{card}\{X_k \ / \ k\in[\![1,n]\!]\}$.

a) Montrez que pour tout $a\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(R_n)\leqslant a+n\mathbb{P}(X_1\geqslant a)$.

b) Montrez que $\mathbb{E}(R_n)=o(n)$ quand $n\to+\infty$.

c) On suppose que X_1 possède une espérance finie. Montrez que $\mathbb{E}(R_n)=O(\sqrt{n})$.

****26)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$, X_n le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire qui suit la loi uniforme sur S_n. Trouvez l'espérance et la variance de X_n.

****27)** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$ et centrée.

a) Justifiez que pour tout $x\in[a,b]$, $\mathrm{e}^x\leqslant\dfrac{b-x}{b-a}\mathrm{e}^a+\dfrac{x-a}{b-a}\mathrm{e}^b$.

Déduisez-en que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})\leqslant\dfrac{b}{b-a}\mathrm{e}^{ta}-\dfrac{a}{b-a}\mathrm{e}^{tb}$.

b) Soit $\alpha\in\,]0,1[$, $\beta=1-\alpha$. Montrez que pour tout $u\in\mathbb{R}$, $\ln\left(\beta\mathrm{e}^{-\alpha u}+\alpha\mathrm{e}^{\beta u}\right)\leqslant\dfrac{u^2}{8}$.

c) Montrez que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})\leqslant\exp\left(\dfrac{(b-a)^2t^2}{8}\right)$.

Oraux de concours

1) TPE Soit X, Y deux v.a. indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminez la loi de $Z = X/Y$.

2) TPE Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2.

a) Trouver $m \in \mathbb{R}$ minimisant $x \mapsto \mathbb{E}((X-x)^2)$.

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On suppose que $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $\mathbb{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

3) IMT Dans un jardin de n tulipes (numérotées), chaque tulipe a une probabilité $p \in]0,1[$ de fleurir à l'année k. Si une tulipe fleurit une année, elle fleurira les années suivantes. On pose X_i la variable aléatoire qui compte le nombre d'années au bout desquelles la tulipe i est fleurie. Enfin, X est la variable aléatoire qui compte le nombre d'années au bout desquelles toutes les tulipes sont fleuries.

a) Déterminer la loi de chaque X_i. Exprimer X en fonction des X_i.

b) Pour tout k, calculer $\mathbb{P}(X < k)$ et en déduire la loi de X.

c) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

4) IMT Soit $\lambda > 0$, X une v.a. suivant la loi $\mathscr{P}(\lambda)$.

a) Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

b) Quelle est la probabilité que X soit un entier pair.

5) IMT Soit X une variable aléatoire suivant le loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$. Montrer qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé telles que $X \sim Y + Z$.

6) CCINP Soit $\lambda, \mu > 0$, X et Y deux v.a. suivant respectivement les lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X relative à l'événement $(X+Y=n)$.

7) CCINP Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant le loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

a) Pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(X+Y=k)$.

b) Même question pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.

c) Déterminer $\mathbb{P}(X+Y=Z)$ en utilisant la formule des probabilités totales.

d) Déterminer $\mathbb{P}(X+Y+Z=n)$.

8) IMT On considère une pièce équilibrée et on réalise une série de lancers indépendants. On note X le nombre de *face* avant l'apparition du deuxième *pile*. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

9) CCINP Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

b) Soit $x \in]-1,1[$. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la somme $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

c) Calculer $\mathbb{P}(Y=k)$ et donner la loi de $Y+1$.

10) CCINP Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi et à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui admettent un moment d'ordre 2.

a) Calculer $\mathbb{E}(X-Y)$ et exprimer $\mathbb{V}(X-Y)$ en fonction de $\mathbb{V}(X)$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)^2$.

c) Dans cette question, X et Y suivent la loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$ et déterminer la loi de $Z = X - Y$.

d) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer que si $X(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$, alors $\mathbb{P}(X=Y) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

e) Montrer que $\mathbb{P}(X=Y) \leqslant 1 - 2\mathbb{V}(X)$.

11) CCMP Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A, B deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathscr{P}([\![1, n]\!])$ et qui suivent la loi uniforme.

Déterminer $\mathbb{P}(A \subset B)$.

12) CCMP On considère un urne contenant a boules blanches et b boules rouges. Après chaque tirage, on remet dans l'urne c boules de la même couleur que celle tirée. On effectue n tirages et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées.

a) Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

b) On considère Y la variable aléatoire donnant le numéro du premier tirage où l'on tire une boule rouge. Montrer que Y admet une espérance et calculer la loi de Y.

13) CCMP Soit X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose qu'il existe une fonction f telle que $Y = f(X)$. Que dire de Y ?

14) CCMP Une urne contient $2N$ boules blanches et N boules noires. On effectue des tirages avec remise et on note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules blanches consécutives. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

a) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

b) Déterminer la loi de X.

c) Montrer que X possède un moment à tout ordre.

d) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

15) CCMP Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. qui suivent la loi $\mathscr{B}(p)$.

On pose $L_1 = \max\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ X_1 = X_2 = \ldots = X_k\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon.

a) Montrer que L_1 est presque sûrement finie, donner sa loi, son espérance et sa variance.

b) Si $L_1 < +\infty$, alors on pose $L_2 = \max\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ X_{L_1+1} = X_{L_1+2} = \ldots = X_{L_1+k}\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon. Montrer que L_2 est presque sûrement finie, donner sa loi, son espérance et sa variance.

16) CCMP Soit X une v.a. suivant la loi $\mathscr{G}(p)$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note $Y = \min(m, X - 1)$.

Calculer l'espérance et la variance de Y.