

Démonstration de la linéarité de l'espérance

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Si X et Y ont une espérance finie, alors $X + Y$ en a une aussi et $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration. On note $L = X(\Omega)$ et $M = Y(\Omega)$, qui sont par hypothèse des ensembles au plus dénombrables. La variable aléatoire $X + Y$ est à valeurs dans $S = L + M = \{\ell + m \mid (\ell, m) \in L \times M\}$, qui est un ensemble lui aussi au plus dénombrable.

On pose $A = \sum_{s \in S} |s| \mathbb{P}(X + Y = s)$.

Or la famille $(\{X = \ell\})_{\ell \in L}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall s \in L + M \quad \mathbb{P}(X + Y = s) = \sum_{\ell \in L} \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{X + Y = s\})$$

Or $\{X = \ell\} \cap \{X + Y = s\} = \{X = \ell\} \cap \{Y = s - \ell\}$, donc il vient

$$A = \sum_{s \in L + M} \left(|s| \sum_{\ell \in L} \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{X + Y = s\}) \right) = \sum_{\substack{\ell \in L \\ s \in L + M}} |s| \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = s - \ell\})$$

Pour tout $s \in L + M$ et $\ell \in L$,

— soit il s'écrit $s = \ell + b$ où $b \in M$, et dans ce cas $\mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = s - \ell\}) = \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = b\})$

— soit il ne s'écrit pas sous cette forme, donc $s - \ell \notin M$ donc $\mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = s - \ell\}) = 0$

Donc on peut écrire par changement de variables $m = s - \ell$

$$A = \sum_{\substack{\ell \in L \\ m \in M}} |\ell + m| \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = m\})$$

la première expression ayant les mêmes termes que la seconde, avec éventuellement des termes nuls supplémentaires.

Donc

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{\substack{\ell \in L \\ m \in M}} (|\ell| + |m|) \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = m\}) \\ &= \sum_{\ell \in L} \sum_{m \in M} |\ell| \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = m\}) + \sum_{m \in M} \sum_{\ell \in L} |m| \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = m\}) \\ &= \sum_{\ell \in L} \left(|\ell| \sum_{m \in M} \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = m\}) \right) + \sum_{m \in M} \left(|m| \sum_{\ell \in L} \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = m\}) \right) \\ &= \sum_{\ell \in L} (|\ell| \mathbb{P}(\{X = \ell\})) + \sum_{m \in M} (|m| \mathbb{P}(\{Y = m\})) \end{aligned}$$

d'après la formule des probabilités totales car les familles $(\{X = \ell\})_{\ell \in L}$ et $(\{Y = m\})_{m \in M}$ sont des s.c.e.

Donc on obtient par sommabilité des familles $(\ell \mathbb{P}(\{X = \ell\}))_{\ell \in L}$ et $(m \mathbb{P}(\{Y = m\}))_{m \in M}$:

$$A < +\infty$$

Ceci prouve que la sommabilité de la famille $(s \mathbb{P}(X + Y = s))_{s \in S}$, i.e. la variable aléatoire $X + Y$ possède une espérance finie.

Maintenant qu'on a prouvé la sommabilité, on peut tout refaire sans les valeurs absolues et on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{s \in S} s \mathbb{P}(X + Y = s) = \dots \\ &= \sum_{\substack{\ell \in L \\ m \in M}} (\ell + m) \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = m\}) = \dots \\ &= \sum_{\ell \in L} (\ell \mathbb{P}(\{X = \ell\})) + \sum_{m \in M} (m \mathbb{P}(\{Y = m\})) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

•

En adaptant la preuve, on montre de même que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si X a une espérance finie, alors λX en a une aussi et $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$.

Démonstration. Si $\lambda = 0$, c'est évident. On suppose donc $\lambda \neq 0$.

Avec les mêmes notations, λX prend ses valeurs dans $S = \lambda L = \{\lambda \ell \mid \ell \in L\}$, qui est aussi au plus dénombrable.

On remarque que pour tout $\ell \in L$, $\{\lambda X = \lambda \ell\} = \{X = \ell\}$.

Donc $A = \sum_{s \in S} |s| \mathbb{P}(\lambda X = s) = \sum_{\ell \in L} |\lambda \ell| \mathbb{P}(\lambda X = \lambda \ell)$, car $t \mapsto \lambda t$ est une bijection de L dans S ,

donc $A = |\lambda| \sum_{\ell \in L} |\ell| \mathbb{P}(X = \ell) < +\infty$.

La famille $(s \mathbb{P}(\lambda X = s))_{s \in S}$ est donc sommable, *i.e.* λX possède une espérance finie.

On peut donc reprendre les calculs précédents sans valeurs absolues, on obtient bien $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$. •