Démonstration du théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, f une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Si $f(X)$ a une espérance finie, alors $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X = x)$.

Démonstration. On note $L = X(\Omega)$ qui est au plus dénombrable, donc $S = f \circ X(\Omega) = f(X(\Omega)) = \{f(\ell) \ / \ \ell \in L\}$ est au plus dénombrable.

Pour $s \in S$, on note A_s l'ensemble des antécédents dans L de s par f : $A_s = f^{-1}(\{s\})$.

On suppose que $f(X)$ a une espérance finie, *i.e.* $B = \sum_{s \in S} |s|\,\mathbb{P}(f(X) = s) < +\infty$,

ou encore $B = \sum_{s \in S} |s|\,\mathbb{P}(X \in A_s) < +\infty$.

Or $\{X \in A_s\} = \bigsqcup_{\ell \in A_s} \{X = \ell\}$ (réunion au plus dénombrable), donc $P(X \in A_s) = \sum_{\ell \in A_s} \mathbb{P}(X = \ell)$.

Donc $B = \sum_{s \in S} \sum_{\ell \in A_s} |s|\,\mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{s \in S} \sum_{\ell \in A_s} |f(\ell)|\,\mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{\ell \in L} |f(\ell)|\,\mathbb{P}(X = \ell)$

car la famille de parties $(A_s)_{s \in S}$ est une partition de L et donc le th. de sommation par paquets s'applique.

Ceci prouve que la famille $(f(\ell)\,\mathbb{P}(X = \ell))_{\ell \in L}$ est sommable, donc on peut reprendre les calculs précédents sans valeurs absolues :

$$\sum_{\ell \in L} f(\ell)\,\mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{s \in S} \sum_{\ell \in A_s} s\,\mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{s \in S} s\,\mathbb{P}(X \in A_s) = \sum_{s \in S} s\,\mathbb{P}(f(X) = s) = \mathbb{E}(f(X))$$

•