Soit $a \in]0,1[$. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = f(ax)$.

Q 1. Montrer que si f est une solution, alors f est de classe C^∞. Exprimer alors $f^{(n)}$ en fonction de f. En déduire $f^{(n)}(0)$.

Q 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{1}{n!}a^{(n-1)n/2}x^n$.

Q 3. On pose $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{(n-1)n/2}}{n!}x^n$. Montrer que g est une solution.

Q 4. Soit f une solution telle que $f(0) = 0$. Montrer que $f = 0$. *Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Q 5. Conclure l'exercice.

Exercice hebdomadaire 13 - Corrigé

Q 1. On pose $\alpha_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On remarque que $\alpha_{n+1} = \alpha_n + n$.

On pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « f est de classe C^n et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{\alpha_n} f(a^n x)$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie, car f dérivable implique f continue et $f^{(0)} = f$ par convention.

f' est la composée des fonctions f et $x \mapsto ax$ qui sont continues, donc f' est continue, *i.e.* f est de classe C^1. On constate alors que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors f' est la composée des fonctions f et $x \mapsto ax$ qui sont de classe C^n, donc f' est de classe C^n, *i.e.* f est de classe C^{n+1}.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = a^{\alpha_n} \times a^n f'(a^n x) = a^{\alpha_n + n} f(a \times a^n x) = a^{\alpha_{n+1}} f(a^{n+1} x)$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie (et donc f est de classe C^∞).

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a^{\alpha_n} f(0)$.

Q 2. On pose $b_n = \dfrac{1}{n!} a^{(n-1)n/2}$. La suite (b_n) ne s'annule pas, donc on peut essayer d'utiliser la règle de d'Alembert.

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{a^{\alpha_{n+1}}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^{\alpha_n}} = \frac{a^{\alpha_{n+1}-\alpha_n}}{n+1} = \frac{a^n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } a \in]0,1[.$$

Donc le rayon de convergence est $+\infty$.

Q 3. D'après la question précédente, g est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on peut donc dériver terme à terme cette série entière : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{(n-1)n/2}}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{\alpha_n}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{\alpha_{n-1}+(n-1)}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{\alpha_{n-1}}}{(n-1)!} (ax)^{n-1} = g(ax).$$

Donc g est solution.

Q 4. D'après la question 1, f est solution et $f(0) = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

f est de classe C^∞ donc d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = |f(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \displaystyle\sup_{[0,x]} |f^{(n+1)}|$ (où comme d'habitude, $[0,x]$ désigne le segment d'extrémités 0 et x, indépendament de savoir si x est positif ou pas).

Or pour tout $t \in [0,x]$, $|f^{(n+1)}(t)| = a^{\alpha_{n+1}} |f(a^{n+1} t)|$ et comme $a \in]0,1[$, $|a^{n+1} t| \leqslant |t|$ donc $a^{n+1} t \in [0,x]$, donc $|f(a^{n+1} t)| \leqslant \displaystyle\sup_{[0,x]} |f| = M_x$.

On a donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1} a^{\alpha_{n+1}}}{(n+1)!} M_x$ où M_x est une constante indépendante de n.

On pose $u_n = \dfrac{|x|^n a^{\alpha_n}}{n!} \geqslant 0$. Alors (pour $x \neq 0$) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x| a^n}{(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la série de terme général u_n converge (règle de d'Alembert), donc en particulier, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1} a^{\alpha_n}}{(n+1)!} = 0$, donc par passage à la limite, $|f(x)| \leqslant 0$.

Donc f est la fonction nulle.

Q 5. Si f est solution, alors on pose $h = f - f(0)g$.

Il est évident par linéarité de la dérivation que h est aussi solution du problème et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) - f(0) g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) - f(0) a^{\alpha_n} = 0$ d'après la question 1.

Donc d'après la question précédente, h est nulle, donc f est un multiple de g.

La réciproque est évidente d'après la question 3 et la linéarité de la dérivation.

Les solutions du problème sont donc les fonctions λg, où $\lambda \in \mathbb{R}$.