Séries entières

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux séries de fonctions de la forme $x \mapsto a_n x^n$, qu'on appelle des séries entières. Par abus de notations, on les note sous la forme $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

Lorsque la variable est complexe, on la note systématiquement z et on parle des séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$.

1 Convergence simple d'une série entière

1.1 Rayon de convergence

On commence par le lemme d'Abel.

Proposition 1. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes, z_0 un complexe.*
Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.

Définition. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On pose $M = \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \ \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.
L'ensemble M est une partie non vide de $\mathbb{R}$, car elle contient 0.
Si elle est majorée, on appelle rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ le réel $R = \sup M$.
Sinon on pose $R = +\infty$.

On peut préciser la convergence simple d'une série entière.

Proposition 2. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On pose R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$.*
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,
- *si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.*
- *si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.*
- *si $|z| = R$, alors on ne peut rien dire a priori.*

Un cas particulièrement inintéressant : le cas $R = 0$! Dans ce cas, mis à part pour $z = 0$, la série entière diverge toujours !

Définition. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On pose R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$.
Si $R > 0$, on appelle disque ouvert de convergence l'ensemble $D(0, R)$ et intervalle ouvert de convergence l'ensemble $]-R, +R[$.

Exemples.
- Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} z^n$ est égal à 1 et pour tout $z \in D(0,1)$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.
- Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est égal à $+\infty$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
Alors d'après la proposition 2, on a la double inclusion $D(0,R) \subset \mathscr{D}_f \subset \overline{D}(0,R)$.
Pour une fonction de variable réelle $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on a donc $]-R,R[\subset \mathscr{D}_f \subset [-R,R]$.

1.2 Détermination du rayon de convergence

La réciproque de la proposition 2 est vraie.

Proposition 3. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes, R_0 un réel strictement positif.*

— *Si pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_0$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge,*

— *et si pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R_0$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge,*

alors R_0 est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

De même, on peut donner quelques résultats pratiques découlant de la définition.

Proposition 4. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes, R_0 un réel strictement positif.*

— *Si pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_0$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge,*

— *et s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R_0$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ diverge,*

alors R_0 est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Proposition 5. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes, R un réel strictement positif.*

— *S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R_0$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge,*

— *et si pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R_0$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge,*

alors R_0 est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

***Exercices* :**

1) Donnez le rayon de convergence de chacune des séries entières

$$\sum_{n\geqslant 0} n z^n, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 0} n!\, z^n, \quad \sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{2n}, \quad \sum_{n\geqslant 0} \cos^2(n) z^n$$

2) Soit $\theta \in]0,\pi[$. Donnez le rayon de convergence de la série $\sum \cos(n\theta) z^n$ et calculez sa somme quand z est réel.

1.3 Comparaison de séries entières

Proposition 6. *Soit (a_n), (b_n) deux suites de nombres complexes. On pose R_a, R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.*
Si $a_n = O(b_n)$ (en particulier si $|a_n| \leqslant |b_n|$), alors $R_a \geqslant R_b$.
Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Remarque. Comme le rayon de convergence se calcule en référence à la convergence absolue de la série, il suffit que $|a_n| \sim |b_n|$ pour avoir $R_a = R_b$.

Exercices :

3) Donnez le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n^2+1} z^n$.

4) Donnez le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$.

Un cas favorable très courant qui permet de calculer le rayon de convergence par utilisation de la règle de d'Alembert, particulièrement utile quand le coefficient a_n s'écrit à l'aide de produits ou de quotients.

Proposition 7. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes qui ne s'annule pas.*
Si la suite $\displaystyle\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ converge vers un réel $\ell > 0$, alors $R_a = \dfrac{1}{\ell}$.
Si la suite $\displaystyle\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ converge vers un réel 0, alors $R_a = +\infty$.

Exercices :

5) Donnez le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n+1}{n^2+1} z^n$.

6) Donnez le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^{2n}$.

1.4 Opérations sur les séries entières

Proposition 8. *Soit (a_n), (b_n) deux suites de nombres complexes, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose R_a, R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.*
Alors $R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$ et $R_{\lambda a} \geqslant R_a$ (avec égalité si $\lambda \neq 0$).

Par conséquent, l'ensemble des séries entières qui convergent sur un disque $D(0, R)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Proposition 9. *Soit (a_n), (b_n) deux suites de nombres complexes. On pose R_a, R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.*
On pose (c_n) le produit de Cauchy des suites (a_n) et (b_n).
Alors la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ et $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Exercices :

7) Calculez le produit de Cauchy de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$ avec elle-même. Donnez la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n z^n$.

8) Soit a, b deux complexes distincts et non nuls. Donnez le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a^n z^n$.

Déterminez la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} z^n$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque. Ce résultat énoncé ici est utilisable avec des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$: on commence à $n = 0$! !

Dans le cas général, on s'y ramène en ajoutant des termes nuls au début des séries : si on veut faire le produit de Cauchy de deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_1} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_2} b_n z^n$, alors on pose $a_0 = a_1 = \dots a_{n_1-1} = 0$ et $b_0 = b_1 = \dots b_{n_2-1} = 0$, puis on peut appliquer le résultat précédent : pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=n_1}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=n_2}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$.

Maintenant, on peut prendre en compte les termes nuls.

Si $n < n_1 + n_2$, alors dans cette somme qu'on coupe en deux, tous les termes sont nuls :

$$c_n = \underbrace{a_0 b_n + \ldots + a_{n_1-1} b_{n+1-n_1}}_{\forall i \in [\![0, n_1-1]\!] \ a_i = 0} + \underbrace{a_{n_1} b_{n-n_1} + \ldots + a_n b_0}_{\forall i \in [\![n_1, n]\!] \ n-i < n_2 \text{ donc } b_{n-i}=0} = 0$$

donc $\displaystyle\sum_{n=n_1}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=n_2}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=n_1+n_2}^{+\infty} c_n z^n$ où pour tout $n \geqslant n_1 + n_2$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=n_1}^{n-n_2} a_k b_{n-k}$.

Ne retenons pas ça ! Retenons l'idée et ré-appliquons-la à chaque fois, car en pratique, on a très souvent $(n_1, n_2) = (1, 0)$ ou $(1, 1)$.

2 Propriétés de la fonction somme d'une série entière

2.1 Convergence uniforme et continuité

Théorème 1. *Soit* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.

Alors la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *converge normalement (donc uniformément)* ***sur tout compact inclus dans*** $D(0, R)$.

D'après le th. de continuité des séries de fonctions, on en déduit la continuité de la fonction somme.

Théorème 2. *Soit* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.

Alors la fonction somme $z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est continue sur* $D(0, R)$.

Remarque. Comme l'ensemble de définition de la fonction somme peut être un peu plus grand, il est possible qu'elle soit continue sur une partie plus grande : il n'y a pas beaucoup de résultats qui permettent d'étendre la continuité, il faut donc procéder au cas par cas.

Exercices **:**

9) Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n$, puis étudiez sa continuité.

10) Même exercice avec $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n$.

2.2 Primitivation et dérivation

Lemme 1. *Soit* (a_n) *une suite de nombres complexes.*

Alors les séries entières $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *et* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} n\, a_n z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

Plus généralement, pour tout polynôme P *non nul, la série entière* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} P(n) a_n z^n$ *a le même rayon de convergence. Et cela reste vrai pour toute fraction rationnelle* F *: la série entière* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} F(n) a_n z^n$ *a le même rayon de convergence.*

D'après le th. de dérivabilité des séries de fonctions, on en déduit la dérivabilité de la fonction somme.

Théorème 3. *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.

Alors la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est de classe* C^∞ *sur* $]-R, +R[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, *pour tout* $x \in\ ]-R, +R[$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

On en déduit le théorème de primitivation.

Théorème 4. *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *On note* f *sa somme.*

Alors la fonction somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *est de classe* C^∞ *sur* $]-R, +R[$ *et est une primitive de* f *sur* $]-R, +R[$ *(c'est d'ailleurs la primitive de* f *qui s'annule en* 0*).*

Exercices :

11) Donnez le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} n x^n$ et retrouvez la valeur de sa somme.
12) Même exercice avec $\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n$.
13) Même exercice avec $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} x^n$

2.3 Convergence radiale

Il existe plusieurs types de résultats concernant ce qui se passe au bord du disque ouvert de convergence. Le programme ne cite que le th. de convergence radiale d'Abel.

Théorème 5. *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *On note* f *sa somme, définie sur* $[0, R[$.

Si la série $\sum a_n R^n$ *converge, alors* f *est définie sur* $[0, R]$ *et est continue en* R *(à gauche), donc sur* $[0, R]$ *tout entier :* $\lim_{x \to R_-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

La démonstration de ce théorème est hors-programme. Il y a deux cas particulier faciles à démontrer : si les coefficients a_n sont tous positifs, ou quand la série $\sum a_n R^n$ converge absolument. Dans le cas général, c'est plus difficile à justifier.

3 Fonction développable en série entière

3.1 Généralités

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $r > 0$.
On dit que f est développable en série entière sur $]-r, +r[$ quand il existe une suite complexe (a_n) telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ soit de rayon de convergence $R \geqslant r$ et pour tout $x \in\ ]-r, +r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est appelé le développement en série entière de f (en abrégé d.s.e.).

On dispose d'un théorème d'opérations sur les fonctions développables en série entière.

Théorème 6. *Soit f, g deux fonctions développables en série entière sur $]-r,+r[$ où $r>0$. Alors*

- *les fonctions $f+g$, $f.g$ sont développables en série entières sur $]-r,+r[$;*
- *si $f(0)=0$, alors $g\circ f$ est développable en série entière sur un intervalle $]-r',+r'[$ où $r'>0$;*
- *si $f(0)\neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur un intervalle $]-r',+r'[$ où $r'>0$.*

Exemple. Les fonctions rationnelles qui n'ont pas 0 comme pôle sont développables en série entière.

Exercices :

14) Développez en série entière la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ et précisez le rayon de convergence.
15) Même exercice avec la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
16) Même exercice avec la fonction $x\mapsto \ln(1+x+x^2)$.

Si une fonction f est développable en série entière sur un intervalle $]-r,+r[$ (où $r>0$), alors d'après ce qui précède, f est de classe C^∞ sur $]-r,+r[$ et pour tout $x\in\,]-r,+r[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Mais la réciproque est fausse : une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r,+r[$ n'est pas forcément développable en série entière.

De même, si une fonction est développable en série entière sur un intervalle $]-r,+r[$ (où $r>0$), alors elle possède un d.l. à tout ordre en 0, obtenu en tronquant le d.s.e. à l'ordre voulu.

Là encore, la réciproque est fausse.

3.2 Unicité d'un développement en série entière

Proposition 10. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes, $r>0$.*

Si pour tout $x\in\,]-r,+r[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$, alors $(a_n)=0$.

Le d.s.e. d'une fonction, s'il existe, est unique. Autrement dit, on peut identifier les coefficients de deux d.s.e. égaux.

Corollaire 1. *Soit (a_n), (b_n) deux suites de nombres complexes.*
Si les deux séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à $r>0$ et si pour tout $x\in\,]-r,+r[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$, alors $(a_n)=(b_n)$.

Corollaire 2. *Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,+r[$ ($r>0$).*
Si f est paire, alors les coefficients d'indices impairs du dév. en série entière sont nuls.
Si f est impaire, alors les coefficients d'indices pairs du dév. en série entière sont nuls.

Exercices :

17) On admet momentanément que $f : x\mapsto\sqrt{1+x}$ est développable en série entière sur $]-1,+1[$ et on note alors $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ pour $x\in\,]-1,+1[$.
Déterminez une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont f est solution. Déduisez-en que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}a_n$, puis une expression de a_n en fonction de n.

3.3 Série de Taylor d'une fonction

Définition. Soit $r > 0$, f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r,+r[$.

On appelle série de Taylor de f la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Autrement dit, f est développable en série entière si et s.si f est égale à la somme de sa série de Taylor.

Proposition 11. *Soit f une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0.*

f est égale à sa série de Taylor sur $]-r,+r[$ si et s.si $\forall x \in\ ]-r,+r[$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

La démonstration est élémentaire et repose sur l'égalité de Taylor avec reste intégral.

Comme l'inégalité de Taylor-Lagrange découle de cette égalité, on a une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière.

Proposition 12. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[-r,r]$ (où $r>0$).*

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{r^n}{n!}\sup_{[-r,r]}|f^{(n)}| = 0$, alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$.

***Exercices* :**

18) Soit $a \in\ ]0,1[$. On pose $f : x \mapsto (1+x)^a$. Montrez que f est développable en série entière sur $]-1/2,1/2[$.

3.4 Dév. usuels

Soit a un réel, n un entier naturel, on pose $\displaystyle\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$ (si a est un entier, on retrouve le coefficient du binôme habituel).

Les fonctions usuelles suivantes sont développables en série entière avec un rayon de convergence $R > 0$.

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n && (R=+\infty)\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} && (R=+\infty)\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} && (R=+\infty)\\
\mathrm{ch}\ x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} && (R=+\infty)\\
\mathrm{sh}\ x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} && (R=+\infty)\\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} && (R=1)\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n && (R=1)\\
(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{a}{n}x^n && (R=1)
\end{aligned}
$$

***Exercices* :**

19) Développez en série entière la fonction $x \mapsto \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

20) Même exercice avec $x \mapsto (x+2)\,\mathrm{ch}\,x$.

21) Même exercice avec $x \mapsto \sin^2 x$.

22) Même exercice avec $x \mapsto e^x\ln(1+x)$.

4 Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières

Définition. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On appelle série génératrice associée à X la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(X=n)z^n$.

Proposition 13. *La série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est de rayon de convergence au moins 1.*

On peut écrire sa somme comme une espérance : $G_X(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)z^n = E(z^X)$. *On appelle fonction génératrice associée à X*

Exercices :

23) Déterminez la fonction génératrice associée à une variable de Bernoulli.
24) Même question avec une variable qui suit une loi binomiale.
25) Même question avec une variable qui suit une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.
26) Même question avec une variable qui suit une loi géométrique.
27) Même question avec une variable qui suit une loi de Poisson.

Théorème 7. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
X admet une espérance finie si et s.si G_X est dérivable en 1, dans ce cas $E(X)=G'_X(1)$.
X admet une variance finie si et s.si G_X est deux fois dérivable en 1, dans ce cas $E(X(X-1))=G''_X(1)$.

Proposition 14. *Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y}=G_X.G_Y$.