SÉRIES ENTIÈRES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Déterminez le rayon de convergence des séries entières suivantes (θ réel) :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+n+1}{4^n}z^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sin(n\theta)z^n$ c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin(\tfrac{1}{n})z^n$ d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\ln n}z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\mathrm{ch}(n\theta)z^{2n}$ f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}e^{\sqrt{n+1}}z^n$ g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^{\ln n}z^n$ h) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{\mathrm{ch}(n\theta)}z^n$

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\tan(\tfrac{n\pi}{7})z^n$ j) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}e^{\sin n}z^n$ k) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{4^n(n!)^3}{(3n)!}z^{2n}$ l) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{in\theta}}{n!}z^{n!}$

***2)** Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, α une constante. Donnez le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{2n}$ b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}z^n$ c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^\alpha a_nz^n$

***3)** Soit a une suite réelle décroissante, positive, qui converge vers 0 et telle que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$?

****4)** Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a>0$ et $R_b>0$.

Montrez que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nb_nz^n$ est au moins égal à R_aR_b et donnez un exemple dans lequel il est strictement supérieur.

Quel est le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n^2z^n$?

****5)** Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$.

a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$?

b) On pose quand on le peut $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ où $x\in\mathbb{R}$. Quel est l'ensemble de définition de f ?

c) Donnez une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n. Déduisez-en que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

d) Donnez une expression explicite de $f(x)$.

e) Montrez : $\sqrt{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)4^n}\binom{2n}{n}$.

****6)** On pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

a) Montrez que f est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Calculez $f+f'+f''$. Déduisez-en une equation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.

c) Déterminez une expression simplifiée de $f(x)$.

****7)** Calculez les sommes suivantes en donnant à chaque fois l'ensemble de définition :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^3x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+n+1}{n}x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}x^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}x^n$ g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}(n\theta)}{n}x^n$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^n$

***8)** Montrez que $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donnez les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

****9)**

a) Déterminez le plus grand intervalle I tel que pour tout $x \in I$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$.

b) Déduisez-en le développement en série entière des fonctions arcsin et arccos.

****10)** Développez en série entière les fonctions suivantes, en donnant à chaque fois le rayon de convergence et le domaine de validité du développement, soit par calcul direct à l'aide de fonctions usuelles, soit d'abord par dérivation.

a) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ b) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ c) $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^3}$ d) $x \mapsto e^{-x}\sin x$

e) $x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$ f) $x \mapsto \ln \dfrac{2-x}{3-x^2}$ g) $x \mapsto \cos x \operatorname{ch} x$ h) $x \mapsto \dfrac{\sin(3x)}{\sin x}$

i) $x \mapsto \arctan \dfrac{1}{1+x}$ j) $x \mapsto \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$ k) $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

****11)**

a) Montrez que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \ln t \ln(1-t)\, \mathrm{d}t$ converge.

b) Justifiez que la fonction $t \mapsto \ln t \ln(1-t)$ est la somme d'une série de fonctions qui converge normalement sur $[0,1]$.

c) Donnez la valeur de I. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

****12)** Justifiez l'existence des intégrales suivantes et en vous inspirant de l'exercice précédent, montrez les égalités :

a) $\displaystyle\int_0^1 t^t\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\, \mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2} - 4\ln 2$

****13)** Montrez les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^{n/2}} = \frac{\pi}{6}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

****14)** On veut calculer $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n(2n-1)}$. Pour cela, on introduit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(2n-1)}$.

a) Donnez l'ensemble de définition D de f, l'intervalle ouvert de convergence I, puis pour $x \in I$, écrivez $f(x)$ en fonction de $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.

b) Déterminez une fonction H telle que $\sqrt{x}H'(\sqrt{x}) = h(x)$ pour $x \in I, x > 0$.

c) Calculez des expressions simplifiées de $g(x)$ et $h(x)$, puis donnez la valeur de s.

****15)** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculez les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n.2^n}$.

****16)** Calculez la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)2^n}$.

****17)** On considère la série de fonctions $\sum (-1)^n \ln(n) x^n$.

a) Donner le rayon de convergence de cette série entière.

b) On note S sa somme. Montrer que, pour tout $x \in\ ]-1,1[$,

$$S(x) = \frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})x^{n+1}.$$

c) En déduire que S a une limite en 1_- et la calculer.

Oraux de concours

1) IMT

a) Donner un équivalent simple de $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

b) Donner le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} H_n x^n$, puis calculer la somme de cette série entière.

2) IMT

a) Donner les d.s.e. de cos et ch.

b) Donner le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$.

c) Expliciter la somme $S(x)$ de cette série entière selon le signe de x.

3) CCINP On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times \ldots, \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

a) Donner son rayon de convergence R.

b) On note $f(x)$ la somme de cette série pour $x \in]-R, +R[$. Trouver une équation différentielle du premier ordre à coefficients variables vérifiée par f. En déduire f.

4) CCINP Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, et pour $n \geqslant 2$, $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-1}$.

a) Exprimer a_n en fonction de n.

b) On propose une autre méthode.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 4^n$. En déduire une inégalité sur le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1+5x}{1+2x-3x^2}$. Calculer le rayon de convergence.

d) En déduire a_n.

5) IMT Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

a) La suite est-elle bien définie ? unique ?

b) On suppose que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de rayon de convergence non nul. Trouvez une relation entre f et f^2 et en déduire f à l'aide de fonctions usuelles.

c) Développer f en série entière et conclure.

6) CCINP Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n} x^n$.

7) CCINP Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum \ln(n) x^n$ et $\sum \ln(n!) x^n$.

8) TPE On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{x \sin t}\, \mathrm{d}t$. Montrer que g est développable en série entière et exprimer les coefficients à l'aide des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

9) CCINP On définit (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}$, puis on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n!}$.

a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

b) Exprimer v_{n+1} à l'aide de v_n et n.

c) En déduire que la suite (v_n) converge et donner sa limite.

d) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum v_n x^n$. On note S sa somme.

e) Donner une équation différentielle vérifiée par S.

10) CCINP On définit la suite (p_n) par $p_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$.

a) Calculer p_1, p_2, p_3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leqslant n!$.

b) Montrer que le rayon de convergence est strictement positif.

c) Montrer que $f'(x) = e^x f(x)$. En déduire $f(x)$.

d) Montrer que p_n est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

11) CCMP Pour $n \geqslant 2$, $a_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$. Étudier la convergence des séries $\sum a_n R^n$ et $\sum a_n (-R)^n$.

12) CCMP Soit (a_n) une suite de réels positifs. On suppose que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence égale à 1 et que la série $\sum a_n$ converge. Montrez que $f(x) \xrightarrow[x\to 1_-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

13) CCMP Soit (a_n) une suite de réels positifs. On suppose que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence égale à 1 et que f est bornée sur $[0, 1[$. Montrez que $f(x) \xrightarrow[x\to 1_-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

14) CCMP Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $n\left(\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

a) Si $\ell \neq 0$, déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

b) Que se passe-t-il pour $\ell = 0$?

15) CCMP Calculer $w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2k}{k}$. Indication : utiliser la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

16) CCMP Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k.k!$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

b) Y-a-t-il convergence pour $x = R$? pour $x = -R$?

c) Calculer la limite de S en R.

17) CCMP

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrez que $t \mapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$, puis que $\displaystyle\int_0^1 e^t \ln(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$

18) CCMP

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4}(e^x + 3e^{-x} + 2x\,e^x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) On note alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n \neq 0$ et $\dfrac{1}{a_n} \in \mathbb{N}$.

19) X Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1)a_n$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

c) Calculer $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

d) Calculer a_n, puis donner un équivalent simple de a_n.