Fonctions vectorielles

Dans tout le cours, I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, n désigne un entier naturel non nul.

E, F désignent des e.v.n. de dimension finie. Par choix d'une base et sachant que les normes sont équivalentes, on peut se ramener à une étude sur $\mathbb{R}^n$.

1 Dérivée en un point

1.1 Dérivabilité en un point

Définition. Soit $f : I \to E$, a un élément de I.

On appelle (fonction) taux d'accroissement de f en a l'application

$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

On dit que f est dérivable en a quand $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers une limite ℓ dans E quand x tend vers a.

Si f est dérivable en a, on appelle dérivée de f en a le vecteur

$$f'(a) = \ell = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque. Lorsqu'on étudie « à la main » la limite du taux d'accroissement, on effectue très souvent le changement d'origine $h = x - a$ et on étudie $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand $h \to 0$ (ce qui permet d'utiliser les équivalents ou les DL usuels).

1.2 Interprétation géométrique, DL d'ordre 1, continuité

Proposition 1 (Développement limité d'ordre 1 d'une fonction dérivable)**.** *Soit $f : I \to E$ et $a \in I$. Alors : f est dérivable en a si et seulement si il existe $m \in E$ tel que $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x - a)\, m + o(x - a)$*

Lorsque ces énoncés sont vrais, on a $f'(a) = m$.

On peut utiliser un d.l. à un ordre au moins 1 en a pour montrer que la fonction est dérivable en a.

Proposition 2. *Si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a.*

Remarque. Évidemment la réciproque est fausse !

Dans le cas où $f'(a) \neq 0$:

un vecteur directeur de la droite passant par $f(a)$ et $f(x)$ est par exemple $f(x) - f(a)$, mais aussi $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand $x \neq a$.

Autrement dit f est dérivable en a quand ce vecteur directeur de la droite passant par $f(a)$ et $f(x)$ a une limite dans E, autrement dit quand la courbe décrite par f a une tangente en a : c'est la droite passant par $f(a)$ et dirigée par $f'(a)$.

Si x représente une variable de temps, le vecteur dérivée $f'(a)$ est le vecteur vitesse instantanée au point a. Son sens donne le sens de parcours de la courbe.

1.3 Dérivées à gauche, dérivées à droite

Définition. Soit $f\colon I \to E, \quad a \in I$.

On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a quand $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite (resp. à gauche) dans $\mathbb{R}^n$ quand x tend vers a.

Lorsque f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, on appelle cette limite la dérivée de f à droite (resp. à gauche) en a et on le note $f'_{\mathrm{d}}(a)$ (resp. $f'_{\mathrm{g}}(a)$).

Proposition 3. *Si f est dérivable à droite en a, alors f est continue à droite en a ; de même à gauche. En outre, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a* **et** *$f'_{\mathrm{d}}(a) = f'_{\mathrm{g}}(a)$. Lorsque c'est le cas, $f'(a)$ est égale à la valeur commune de $f'_{\mathrm{d}}(a)$ et $f'_{\mathrm{g}}(a)$.*

On peut parler dans le cas de vecteurs non nuls de demi-tangentes à gauche ou à droite.

1.4 Lien avec les coordonnées

E étant de dimension finie, on choisit une base de E $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $f\colon I \to E$.

Alors pour tout $t \in I$, $f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$. On associe ainsi à f ses n fonctions coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ (qui sont maintenant des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Proposition 4. *Avec les mêmes notations, il y a équivalence entre « f est dérivable en a » et « les fonctions f_i sont dérivables en a ».*

Dans ce cas, $f'(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i'(a)e_i$.

Autrement dit, travailler avec une fonction à valeurs dans E revient à travailler avec n fonctions numériques simultanément.

1.5 Théorèmes opératoires

Proposition 5. *Soit $f\colon I \to E$ et $g\colon I \to E$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Si f et g sont dérivables en a, alors $f+g$, λf sont dérivables en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda f)'(a) = \lambda\, f'(a)$$

Proposition 6. *Soit $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ et $f\colon J \to E$ et telles que $\varphi(I) \subset J$. Soit $a \in I$.*

Si φ est dérivable en a et f est dérivable en $f(a)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) \,.\, f'\big(\varphi(a)\big)$$

Proposition 7. *Soit $f\colon I \to E$, $L \in \mathscr{L}(E, F)$.*

Si f est dérivable en a, alors $L \circ f$ l'est aussi et $(L \circ f)'(a) = L \circ (f')(a)$.

Exemple. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et X est une fonction de I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dérivable en a, alors $Y : t \mapsto A.X(t)$ est aussi dérivable en a et $Y'(a) = A.X'(a)$.

Proposition 8. *Soit $f, g\colon I \to E$, B de $E \times E$ dans F bilinéaire.*

Si f et g sont dérivables en a, alors $B(f,g)$ l'est aussi et $(B(f,g))'(a) = B(f',g)(a) + B(f,g')(a)$.

Exemples.

- Si A et B sont deux fonctions de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivables en a, alors $M : t \mapsto A(t).B(t)$ est aussi dérivable en a et $M'(a) = A'(a)B(a) + A(a)B'(a)$.
- Si u et v sont deux fonctions à valeurs dans E, espace euclidien, et dérivables en a, alors $p : t \mapsto \langle u(t), v(t)\rangle$ est dérivable en a et $p'(a) = \langle u'(a), v(a)\rangle + \langle u(a), v'(a)\rangle$.

Proposition 9. *Soit $f_1, \dots, f_p \colon I \to E$ et M une application de E^p dans F p-linéaire.*
Si $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables en a, alors $M(f_1, \dots, f_p)$ l'est aussi et
$(M(f_1, \dots, f_p))'(a) = \sum_{k=1}^{p} M(f_1, \dots, f_i', \dots, f_p)(a)$.

Exemple. Si M est une fonction de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable en a, alors $d : t \mapsto \det M(t)$ est aussi dérivable en a et $d'(a) = \sum_{k=1}^{n} \det M_k^c(a)$ où $M_k^c(a)$ est la matrice obtenue à partir de $M(a)$ en remplaçant sa k-ème colonne par sa dérivée en a.
Mais aussi $d'(a) = \sum_{k=1}^{n} \det M_k^\ell(a)$ où $M_k^\ell(a)$ est la matrice obtenue à partir de $M(a)$ en remplaçant sa k-ème ligne par sa dérivée en a.

2 Fonction dérivée

Définition. Soit $f \colon I \to E$.
- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en chaque point $a \in I$, ce qui revient à dire après choix d'une base que les fonctions coordonnées de f sont dérivables sur I.
- Si f est dérivable sur I, on définit sa fonction dérivée par

$$\begin{aligned} f' \colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

Proposition 10 (Théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables)**.** *Soit f et g deux fonctions définies sur I, $\quad \lambda \in \mathbb{K}$.*
Si f et g sont dérivable sur I, alors $f + g$, λf sur I et

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f'.$$

Proposition 11. *Soit $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ et $f \colon J \to E$ et telles que $\varphi(I) \subset J$.*
Si φ est dérivable sur I et f est dérivable sur J, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \,.\, f' \circ \varphi$$

Proposition 12. *Soit $f \colon I \to E$, $L \in \mathscr{L}(E, F)$.*
Si f est dérivable sur I, alors $L \circ f$ l'est aussi et $(L \circ f)' = L \circ (f')$.

Proposition 13. *Soit $f, g \colon I \to E$, B de $E \times E$ dans F bilinéaire.*
Si f et g sont dérivables sur I, alors $B(f,g)$ l'est aussi et $(B(f,g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

Proposition 14. *Soit $f_1, \dots, f_p \colon I \to E$ et M une application de E^p dans F p-linéaire.*
Si $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables sur I, alors $M(f_1, \dots, f_p)$ l'est aussi et
$(M(f_1, \dots, f_p))' = \sum_{k=1}^{p} M(f_1, \dots, f_i', \dots, f_p)$.

Exercices :

1) Montrez que si un point M se déplace sur une sphère de centre A, sa vitesse est toujours orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AM}$.
   Montrez que la réciproque est vraie : si A est un point fixe et si la vitesse de M est toujours orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AM}$, alors M se déplace sur une sphère.

2) Soit $S : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable sur I telle que pour tout $t \in I$, $S(t)$ est une matrice de symétrie. Montrez que pour tout $t \in I$, $\operatorname{tr}(S(t)S'(t)) = 0$.
3) Soit $A : I \to GL_n(\mathbb{R})$ dérivable sur I. Montrez que $B : t \mapsto A^{-1}(t)$ est dérivable sur I et calculez sa dérivée en fonction de celle de A.
4) Soit $M : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable sur I, intervalle contenant 0. On pose $f : t \mapsto \det(I_n + tM)$. Justifiez que f est dérivable sur I et calculez $f'(0)$.

3 Dérivées successives

3.1 Définitions et exemples

Si f est dérivable sur I, f' est une fonction définie sur I. On peut donc essayer de la dériver : quand c'est possible, on obtient la dérivée seconde f'', et ainsi de suite...

Définition. Soit $f : I \to E$. On définit par récurrence sur n les notions suivantes :
— Par convention, on dit que f est toujours dérivable 0 fois sur I, et on définit la dérivée d'ordre 0 de f par $f^{(0)} = f$.
— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est dérivable k fois sur I si elle est dérivable $(k-1)$ fois sur I et que sa dérivée d'ordre $(k-1)$, la fonction $f^{(k-1)}$, est dérivable sur I.
On définit alors la dérivée d'ordre k de f par $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

Remarque. $f^{(0)}$ désigne f, $f^{(1)}$ désigne f' et $f^{(2)}$ est aussi notée f''. À partir de trois dérivations, on n'utilise plus de primes.

La dérivée d'ordre k de f est également notée $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}$.

Enfin, il est facile de montrer que f est $p+q$ fois dérivable sur I si et s.si f est p fois dérivable et $f^{(p)}$ est q fois dérivable sur I. Dans ce cas, on a l'égalité $\left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}$.

Définition. Soit $k \in \mathbb{N}$.
On dit que f est de classe C^k sur I si f est dérivable k fois sur I et que sa **dérivée d'ordre** k, $f^{(k)}$, est une fonction continue sur I.
On dit que f est de classe C^∞ sur I si f est dérivable k fois sur I quel que soit $k \in \mathbb{N}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on notera $\mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble comprenant toutes les fonctions de classe C^n sur I.

Remarque. « f est de classe C^0 sur I » signifie « f est continue sur I » ;
« f est de classe C^1 sur I » signifie « f est dérivable sur I et f' est continue sur I ».

Proposition 15. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $k \in \mathbb{N}^*$.*
▷ *Si f est de classe C^k sur I, alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f est de classe C^p sur I*
▷ *f est de classe C^k sur I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est de classe C^{k-1} sur I, ou ce qui revient au même, f est de classe C^{k-1} sur I et $f^{(k-1)}$ est de classe C^1 sur I*

Les ensembles $\mathrm{C}^k(I, E)$ forment donc une chaîne d'inclusions :

$$\mathrm{C}^\infty(I, E) \subset \ldots \subset \mathrm{C}^{k+1}(I, E) \subset \mathrm{C}^k(I, E) \subset \ldots \subset \mathrm{C}^1(I, E) \subset \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$$

3.2 Théorèmes opératoires pour les dérivées successives

Proposition 16. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f, g : I \to E$ deux fonctions de classe C^k sur I, $\lambda \in \mathbb{K}$.*
Alors :
- *$f + g$ est de classe C^k sur I et $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$*
- *λf est de classe C^k sur I et $(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$*

Proposition 17. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $f : J \to E$ deux fonctions de classe C^k sur I.*
Alors :
Si $\varphi(I) \subset J$ et φ et f sont de classe C^k sur I et J respectivement, alors $(f \circ \varphi)$ est de classe C^k sur I.

Proposition 18. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f : I \to E$, $L \in \mathscr{L}(E, F)$.*
Si f est une fonction de classe C^k sur I, alors $L \circ f$ l'est aussi et $(L \circ f)^{(k)} = L \circ (f^k)$.

Proposition 19. *Soit $f, g : I \to E$, B de $E \times E$ dans F bilinéaire.*
Si f et g sont de classe C^k sur I, alors $B(f, g)$ l'est aussi et $(B(f,g))^{(k)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k-j)})$ (formule de Leibniz).

4 Intégrale

4.1 Définition

Définition. Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction définie sur un segment $[a,b]$.
On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ quand il existe une subdivision $(c_0, \dots, c_n)$ de $[a,b]$ (donc $c_0 = a$ et $c_n = b$) telle que
- pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur l'intervalle ouvert $]c_i, c_{i+1}[$;
- f a une limite réelle en a à droite, en b à gauche et des limites réelles à gauche et à droite en chaque point c_i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Toute subdivision qui convient dans cette définition est dite adaptée à f.

On choisit une base de E $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Il est alors évident qu'une fonction à valeurs dans E est continue par morceaux si et s.si ses fonctions coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ le sont aussi.

Définition. Soit $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux sur $[a,b]$. On note $f_1, \dots, f_n$ ses fonctions coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, *i.e.* $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i e_i$.

On pose alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{[a,b]} f_i \right) e_i$.

Bien sûr, les notations classiques pour les intégrales sont conservées : $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, etc. On pose encore $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.
Cette définition est *a priori* ambigüe, car elle dépend de la base $\mathscr{B}$ choisie. On montre aisément qu'en fait, ce n'est pas le cas, donc cette définition ne dépend pas de la base choisie : on obtient toujours le même vecteur intégrale.

4.2 Propriétés

En se ramenant aux coordonnées dans une base, on retrouve les propriétés essentielles de l'intégrale.

Proposition 20. *L'application* $\begin{array}{rcl} C_m^0([a,b]) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array}$ *est linéaire.*

Proposition 21. *La relation de Chasles reste valable :*

pour tout $(a,b,c) \in I^3$, *si* f *est continue par morceaux sur* I, *alors* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

On retrouve une inégalité triangulaire avec la norme (n'importe laquelle !).

Proposition 22. *Soit* $f\colon [a,b] \to E$ *continue par morceaux sur* $[a,b]$.

Alors la fonction $t \mapsto \|f(t)\|$ *est continue par morceaux à et à valeurs réelles. De plus,* $\displaystyle\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$.

On retrouve la notion de sommes de Riemann.

Proposition 23. *Soit* $f\colon [a,b] \to E$ *continue par morceaux. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on introduit les sommes de Riemann associées à la fonction* f *sur* $[a,b]$ *:*

pour $k \in [\![0,n]\!]$, *on pose* $c_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k), \qquad S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k), \qquad S''_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(c_k)$$

Alors les suites (S_n), (S'_n) *et* (S''_n) *tendent toutes les trois vers* $\displaystyle\int_{[a,b)} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Enfin, une petite nouveauté.

Proposition 24. *Soit* $f\colon [a,b] \to E$ *continue par morceaux,* L *une application linéaire de* E *dans* F.

Alors la fonction $L \circ f = L(f)$ *est continue par morceaux et* $\displaystyle\int_a^b L(f) = L\left(\int_a^b f\right)$.

4.3 Primitives d'une fonction continue

Proposition 25.

Soit $f\colon I \to E$ *une fonction continue,* a *un point de* I. *On pose* $\Phi\colon x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors Φ *est l'unique primitive de* f *sur* I *qui s'annule en* a.

Remarque. On a donc montré que si f est une fonction continue sur I, alors la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est de classe C^1 sur I, car pour tout $x \in I$, $\Phi'(x) = f(x)$. **Et non pas** $\Phi'(x) = f(x) - f(a)$ **!!!!**

Corollaire 1. *Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.*

On en déduit l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1 (dérivable ne suffit pas).

Proposition 26. *Soit* $f\colon I \to E$ *une fonction de classe* C^1 *sur* I.
Alors pour tout $(a,b) \in I^2$, $\|f(b) - f(a)\| \leqslant |b-a|.\sup_{[a,b]}\|f'\|$.

4.4 Formules de Taylor

On retrouve encore par utilisation des fonctions coordonnées les formules de Taylor usuelles.
La formule de Taylor avec reste intégral.

Proposition 27. *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I, a et b deux points de I. Alors :*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange qui s'en déduit.

Proposition 28. *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I, a et b deux points de I. Alors :*

$$\left\| f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \right\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|$$

Et la formule de Taylor-Young.

Proposition 29. *Soit $f\colon I \to E$, de classe C^n sur I. Alors pour tout $t_0 \in I$, f possède un d.l. en t_0 à l'ordre n :*

il existe une fonction ε définie sur I à valeurs dans E telle que

$$\begin{cases} \text{pour tout } t \in I, \quad f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \dfrac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \\ \lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0. \end{cases}$$