FONCTIONS À VALEURS VECTORIELLES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

**1) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

a) Justifiez que D_n est dérivable et calculez D'_n.

b) Donnez une expression générale de $D_n(x)$.

**2) Soit $a > 0$, $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[0, a]$ telle que $f(0) = f'(0) = f(a) = 0$. Montrez qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que la tangente au point d'abscisse c passe par l'origine du repère.

**3) Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

**4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0)f'(x_0) > 0$.

a) Montrez qu'il existe $x_1 > x_0$ tel que $f'(x_1) = 0$.

b) Montrez qu'il existe $x_2 > x_1$ tel que $f''(x_2) = 0$.

**5) Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I et $(x_0, \dots, x_n) \in I^{n+1}$ tel que $x_0 < \dots < x_n$ et $f(x_0) = \dots = f(x_n) = 0$. Montrez qu'il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Application : soit P une fonction polynôme de degré n, montrez que l'équation $e^x = P(x)$ a au plus $n + 1$ solutions.

**6) Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' aient pour limite 0 en $+\infty$.

Montrez que f' a aussi pour limite 0 en $+\infty$.

**7)

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez la dérivée n-ème de la fonction $x \mapsto x^{n-1}\ln(1 + x)$ définie sur $] - 1, +\infty[$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculez la dérivée n-ème de

$$x \longmapsto x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

c) Déduisez-en les dérivées n-èmes de

$$x \longmapsto x^{n-1}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad x \longmapsto x^{n-1}e^{1/x}.$$

**8) Soit $F : t \mapsto \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u}\, du$.

a) Déterminez l'ensemble de définition de F.

b) Soit $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{\ln u} - \dfrac{1}{u-1}$. Montrez que φ est prolongeable en une fonction continue sur $]0, +\infty[$.
Déduisez-en que $\lim\limits_{t \to 1} F(t) = \ln 2$.

c) Montrez que pour tout $t \in]1, +\infty[$, $\dfrac{t^2 - t}{2\ln t} \leqslant \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u}\, du$. Déduisez-en $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$.

d) Étudiez la fonction F (on la prolongera par continuité chaque fois que c'est possible) et donnez l'allure de sa courbe représentative.

e) Soit $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$, prolongée par continuité en 0 et en 1. Montrez que pour tout $t \in]0, 1[$, $\displaystyle\int_0^t f = F(t)$. Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f$.

****9)** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Montrez que pour toute application $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$\max_{[a,b]} |f| \leqslant \int_a^b |f'| + \frac{1}{b-a}\int_a^b |f|$$

Montrez que cette inégalité est également valable pour toute application $f \in C^1([a,b],\mathbb{C})$.

****10)** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit $f \in C^2([a,b],E)$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M = \sup\limits_{[a,b]} \|f''\|$.

a) Montrez que pour tout $x \in [a,b]$, $\|f(x)\| \leqslant \dfrac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

b) Montrez que $\left\| \displaystyle\int_a^b f \right\| \leqslant \dfrac{M(b-a)^3}{12}$.

c) Déduisez-en une majoration de l'erreur commise lors du calcul approchée de $\displaystyle\int_a^b f$ par la méthode des trapèzes.

****11)** Soit f continue sur $[a,b]$ $(a < b)$. Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b \|f(t)\|^n \,\mathrm{d}t \right)^{1/n} = \sup_{[a,b]} \|f\|$.

****12)** Soit $1 < a$. Montrez que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ est continue sur $[0,\pi]$.

Sans chercher à utiliser une primitive, montrez $\displaystyle\int_0^\pi f = 2\pi \ln a$.

****13)** Soit $x \in \mathbb{C} - \mathbb{U}$. Décomposez en éléments simples la fraction $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$, puis calculez $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{z - e^{it}}\,\mathrm{d}t$.

****14)** On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et de classe C^1, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \neq 0$.

Montrez que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} \in 2\pi\mathbb{Z}$.

****15)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in C^\infty([a,b],E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\|f^{(n)}(x)\| \leqslant |P(x)|$. Montrez que $f = 0$.

****16) [Égalité de la moyenne généralisée]**

Soit f, g continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles et g positive. Montrez qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

****17) [Égalité de Taylor-Lagrange]**

Soit $f \in C^{n+1}([a,b],E)$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{[n+1)}(c)$$

*****18)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrez qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

*****19)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrez qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

****20)** On considère l'application $u : t \mapsto e^{-t^2/2}$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n(t) = e^{t^2/2}u^{(n)}(t)$.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.

b) Montrez que si $f \in C^0([a,+\infty[,\mathbb{R})$ est dérivable sur $]a,+\infty[$ et si $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} f(a)$, alors il existe $c \in \,]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

c) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

**21) Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées. On note $M_0 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f''|$.

a) Montrez que pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2} M_2$ et $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2} M_2$.

b) Déduisez-en que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{h}{2} M_2$.

c) Montrez que f' est aussi bornée sur $\mathbb{R}$ et que $M_1 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f'| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

***22) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que
$\triangleright$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$
$\triangleright$ il existe $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(t)| \leqslant a^n n!$

a) Montrez que f est la fonction nulle sur $\left[-\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a}\right]$.

b) Montrez que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Oraux de concours

1) CCINP Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

2) TPE Chercher les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $f(0) = 1$, $f'(0) > 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(f(x))f'(x) = 1$.

3) CCINP Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^n \ln x$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{(n)}(1/n) = \gamma$ où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

4) CCMP Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue. On pose $g : x \mapsto xf(x)$ et $h : x \mapsto f(1/x)$. Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ si et s.si h l'est aussi.

5) CCMP Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout $x \in [0,1]$, $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$. Montrer que l'ensemble des zéros de f est fini.

6) CCMP Soit $a < b$ deux réels, E l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ et strictement positives. Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = \displaystyle\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}$. Déterminer $\varphi(E)$.

7) CCMP Soit $E = \left\{ f \in C^0([0,1], \mathbb{R}_+) \ / \ \forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y| \right\}$. Déterminer $\inf\limits_{f \in E} \displaystyle\int_0^1 f$.

8) CEN Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ majorée, de classe C^2 et $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f''(x) \geqslant \alpha f(x)$.

a) Montrer que f' est croissante et $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$.

b) Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant f(0) e^{-x\sqrt{\alpha}}$.