Endomorphismes dans un espace euclidien

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension n, muni du produit scalaire $(.,.)$.

1 Adjoint d'un endomorphisme

1.1 Représentation des formes linéaires

Le théorème suivant est parfois appelé th. de représentation de Riesz.

Proposition 1. *Soit φ une forme linéaire sur E.*
Il existe un unique vecteur v tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = (v, x)$.

1.2 Adjoint

Proposition 2. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.*
Il existe un unique endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $(f(x), y) = (x, g(y))$.

Définition. L'endomorphisme g est appelé l'adjoint de f et est noté f^*.

Par bilinéarité du produit scalaire et symétrie, on en déduit les propriétés élémentaires de l'adjonction.

Proposition 3.

- ▷ *L'application $f \mapsto f^*$ est linéaire.*
- ▷ *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $f^{**} = f$.*
- ▷ *Pour tout $(f, g) \in L(E)^2$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.*

***Exercices* :**

1) Montrez que si f est un projecteur orthogonal, alors $f^* = f$.
2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$. Comparez $\operatorname{rg} f$ et $\operatorname{rg} f^*$.
3) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f^* \circ f)$.

1.3 Matrice de l'adjoint

Proposition 4. *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$.*
Alors $g = f^*$ si et s.si $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} g = (\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} f)^\top$.

Remarque. Attention, ceci n'est valable qu'en base orthonormée. En base quelconque, c'est plus compliqué.

***Exercices* :**

4) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose f diagonalisable. Montrez l'équivalence : $f^* = f^2$ si et s.si f est un projecteur orthogonal.

1.4 Stabilité de s.e.v.

Une propriété remarquable et utile pour la suite du cours.

Proposition 5. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, F un s.e.v. de E.*
Si F est stable par f, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par f^*.

2 Orientation d'un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition. On dit que deux bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ de E ont la même orientation quand $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' > 0$, sinon on dit qu'elles sont d'orientations contraires.

Orienter E, c'est choisir une base de référence et déclarer directes toutes les bases qui ont la même orientation que cette base de référence. Les bases de l'autre classe d'équivalence sont dites indirectes (ou rétrogrades).
En géométrie classique dans le plan ou l'espace, on convient systématiquement d'une orientation.

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension n. On suppose aussi que E est orienté.

3 Isométries vectorielles

Définition. On appelle isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) tout endomorphisme de E qui conserve la norme : pour tout $x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

Remarque. L'appellation « automorphisme » n'est pas usurpée

L'ensemble des isométries vectorielles est noté $\mathscr{O}(E)$.

Proposition 6. *$\mathscr{O}(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.*

Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles. Parmi celles-ci, on distingue les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan : on les appelle les réflexions.
On peut caractériser les isométries vectorielles de diverses façons.

Proposition 7. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
- *f est une isométrie vectorielle ;*
- *f conserve le produit scalaire : pour tout $(x, y) \in E^2$, $(f(x), f(y)) = (x, y)$;*
- *f transforme toute base orthonormée en une base orthonormée ;*
- *f est un automorphisme et $f^* = f^{-1}$, ou ce qui revient au même $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.*

Exercices :

5) Soit E un espace euclidien, a un vecteur non nul, et k un réel. Soit $f : x \mapsto x + k.(x|a).a$. Montrez que f est linéaire, puis déterminez les conditions sur a, k pour que f soit une isométrie vectorielle. Dans ce cas, reconnaissez-la.

4 Matrices orthogonales

Proposition 8. *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. On note A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.*
Alors $f \in \mathscr{O}(E)$ si et s.si $A^\mathsf{T} A = I_n$.

Attention ! Ceci n'est valable que si la base $\mathscr{B}$ est orthonormée.

Définition. Une matrice carrée A est dite orthogonale quand $A^\mathsf{T} A = I_n$, ce qui est équivalent à $AA^\mathsf{T} = I_n$ ou A est inversible et $A^{-1} = A^\mathsf{T}$.

Proposition 9. *Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale quand ses colonnes sont de norme 1 et deux à deux orthogonales pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

On peut remplacer dans cette proposition le mot « colonne » par « ligne ».

Exercices :

6) Vérifiez que la matrice $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. Puis montrez qu'elle est la matrice d'une symétrie orthogonale dont vous préciserez les éléments caractéristiques.

7) Déterminez les réels a et b tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ soit orthogonale. Reconnaissez la nature de l'isométrie vectorielle de matrice A dans une base orthonormée $\mathscr{B}$.

L'ensemble des matrices orthogonales est noté $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 10. *$\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.*

4.1 Déterminant d'une isométrie vectorielle

Proposition 11. *Si $f \in \mathscr{O}(E)$, alors $\det f \in \{-1, +1\}$.*

La réciproque est bien sûr fausse.

Les isométries vectorielles de déterminant $+1$ sont celles qui conservent l'orientation : elles transforment les bases orthonormées directes en bases orthonormées directes. On les appelle les isométries directes ou isométries positives.

On note $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1, $\mathscr{SO}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles positives.

Proposition 12. *$\mathscr{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathscr{O}(E)$, appelé groupe spécial orthogonal de E.*
$\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n.

Les réflexions sont des isométries négatives.

4.2 Changements de bases orthonormées

Proposition 13. *Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E.*
La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est une matrice orthogonale.

L'intérêt de ce genre de changement de bases est que la difficulté liée au calcul de l'inverse de la matrice de passage disparaît :

$X = PX'$ est équivalent à $X' = P^{\mathsf{T}}X$

$A' = P^{-1}AP$ devient $A' = P^{\mathsf{T}}AP$.

4.3 Produit mixte

Proposition 14. *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.*
Le déterminant de $(v_1, \ldots, v_n)$ dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base.

Dans ce cas, on appelle produit mixte de $(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de cette famille dans n'importe quelle base orthonormée directe : il est noté habituellement $\mathrm{Det}(v_1, \ldots, v_n)$ ou $[v_1, \ldots, v_n]$.

Une conséquence directe de la définition du produit mixte est la caractérisation des bases directes.

Proposition 15. *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.*
Alors $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base directe de E si et s.si $[v_1, \ldots, v_n] > 0$.

4.4 Produit vectoriel en dimension 3

Dans ce paragraphe, $n = 3$.

Proposition 16. *Soit* $(u, v) \in E^2$.
Il existe un unique vecteur $w \in E$ *tel que pour tout* $x \in E$, $[u, v, x] = (w, x)$.
Ce vecteur est appelé le produit vectoriel de u *et* v *et est notée* $u \wedge v$ *ou* $u \times v$.

En base orthonormée directe, les coordonnées du produit vectoriel se calculent facilement. En base quelconque, c'est beaucoup plus pénible.

Notons quelques propriétés algébriques et géométriques du produit vectoriel :

Proposition 17.

- ▷ *l'application* $\wedge$ *est bilinéaire et antisymétrique*
- ▷ $u \wedge v = 0$ *si et seulement si* u, v *sont colinéaires*
- ▷ *si* u *et* v *ne sont pas colinéaires, alors* $u \wedge v$ *est un vecteur normal au plan* $\mathrm{vect}(u, v)$ *et la famille* $(u, v, u \wedge v)$ *est une base directe*
- ▷ *si* u *et* v *sont unitaires et orthogonaux, alors la famille* $(u, v, u \wedge v)$ *est une base orthonormée directe*

5 Étude en dimension 2

Proposition 18. $\mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ *contient exclusivement les matrices suivantes :*

— *les matrices de rotation* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

— *les matrices de réflexions* $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

où θ *est un réel quelconque.*

L'ensemble des matrices de rotations forme le sous-groupe $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$ (groupe spécial orthogonal) : c'est l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1.

Il est remarquable que ce groupe est commutatif, car en dimension $n \geqslant 3$, ce n'est plus le cas. En effet, il est facile de constater que l'application $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme surjectif de groupes de $\mathbb{R}, +$ dans $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$ (dont le noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{R}, +)$).

Autrement dit, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathscr{SO}_2(\mathbb{R}) \\ e^{i\theta} & \mapsto & R(\theta) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Proposition 19. *En dimension 2, les isométries vectorielles sont :*

— *les rotations vectorielles*

— *les réflexions vectorielles*

6 Réduction des isométries vectorielles ou des matrices orthogonales

6.1 Réduction des isométries vectorielles

D'abord deux résultats généraux sur les isométries vectorielles.

Proposition 20. *Soit* $f \in \mathscr{O}(E)$.

- ▷ $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, +1\}$.
- ▷ *Si* F *est un s.e.v de* E *stable par* f, *alors* $F^\perp$ *est aussi un s.e.v. de* E *stable par* f.

De ces propriétés découlent le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit $f \in \mathscr{O}(E)$.*

Alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, les blocs étant
- *— des scalaires 1 ou -1*
- *— ou des matrices $(2,2)$ de rotation $R(\theta)$.*

Les matrices diagonales par blocs sont donc du type suivant :

$$D = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&&& \\ &&&&& -1 &&&&& \\ &&&&&& \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 &&& \\ &&&&&& \sin\theta_1 & \cos\theta_1 &&& \\ &&&&&&&& \ddots && \\ &&&&&&&&& \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ &&&&&&&&& \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

6.2 Réduction des matrices orthogonales

Définition. Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A et B sont orthogonalement semblables quand il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP = P^{\mathsf{T}}AP$.

On dit aussi « orthosemblables ».

Deux matrices sont orthogonalement semblables quand elles représentent le même endomorphisme dans des bases orthonormées différentes.

Le théorème de réduction précédent a une traduction matricielle.

Théorème 2. *Toute matrice orthogonale est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs du type ci-dessus.*

Pour tout $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale par blocs comme ci-dessus telles que $A = P^{\mathsf{T}}DP$.

6.3 Étude en dimension 3

À l'aide de ce résultat, on peut classifier les isométries vectorielles de E en dimension 3. Seule la réduction des rotations est au programme.

Dans la suite de cette section, E est un espace euclidien de dimension 3 et orienté.

Proposition 21. *Soit $f \in \mathscr{O}(E)$. On pose $F = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et $p = \dim F$. Alors*
- ▷ *si $\dim F = 3$, alors $f = \operatorname{Id}_E$*
- ▷ *si $\dim F = 2$, alors f est la réflexion par rapport à F*
- ▷ *si $\dim F = 1$, alors f est une rotation d'axe F*
- ▷ *si $\dim F = 0$, alors f est une antirotation, c'est-à-dire la composée d'une rotation et d'une réflexion dont l'axe et le plan de base respectifs sont orthogonaux.*

En étudiant les différents cas, on constate un lien entre le type de f et son déterminant.

Proposition 22. *Soit $f \in \mathscr{O}(E)$, $f \neq \operatorname{Id}_E$.*

Alors f est une rotation si et seulement si $\det f = 1$.

Dans le cas où $\det f = -1$, cette information ne suffit pas à connaître le type de f. Cependant, si on connaît la matrice A de f dans une base orthonormée, alors on peut distinguer les cas 1 et 3.

Proposition 23. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit A la matrice de f dans une base orthonormée*
Si A est une matrice orthogonale et symétrique, alors f est une symétrie orthogonale.
- *Si $\det f = 1$, alors A est un demi-tour (une rotation d'angle π).*
- *Si $\det f = -1$, alors A est une réflexion.*

Donc, si A est orthogonale de déterminant -1 et non symétrique, alors f est une antirotation.

Exercices :

8) Reconnaissez la nature de l'endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ est $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -11 & 10 & 2 \\ -2 & -5 & 14 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ et précisez ses éléments caractéristiques.
9) Même exercice avec la matrice $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
10) Même exercice avec la matrice $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$
11) Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E de dimension 3.
Déterminez la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe orienté par $i + j + k$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

7 Endomorphismes auto-adjoints

7.1 Définition et propriétés

Définition. On dit qu'un endomorphisme f de E est auto-adjoint quand $f^* = f$, autrement dit quand

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (f(x), y) = (x, f(y))$$

On rencontre encore très souvent le mot « symétrique » pour « auto-adjoint ».

Exemples.

— Les symétries orthogonales sont aussi des endomorphismes auto-adjoints.

— Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes auto-adjoints (mais pas des endomorphismes orthogonaux !)

Au passage, une précision à propos des projecteurs orthogonaux.

Proposition 24. *Soit f un projecteur. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

— *f est un projecteur orthogonal*

— *f est auto-adjoint*

— *pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$*

Proposition 25. *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $f \in \mathscr{L}(E)$.*

Alors f est un endomorphisme auto-adjoint si et s.si sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique.

Corollaire 1. *L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Il est noté $\mathscr{S}(E)$.

7.2 Théorème spectral

Il y a essentiellement un seul résultat à connaître sur les endomorphismes auto-adjoints ! On commence par deux lemmes.

Lemme 1. *Si un s.e.v. F est stable par un endomorphisme auto-adjoint, alors $F^\perp$ l'est aussi.*

Lemme 2. *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme auto-adjoint est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 3. *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont deux à deux orthogonaux et supplémentaires dans E.*

Autrement dit, tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

On dit que les endomorphismes auto-adjoints sont orthodiagonalisables.

Remarque. La réciproque est vraie et presque évidente : si un endomorphisme est orthodiagonalisable, alors il est auto-adjoint.

***Exercices* :**

12) Un grand classique à savoir refaire.

Soit u un endomorphisme auto-adjoint, B la boule-unité fermée de E, S la sphère-unité. On pose α la plus petite des valeurs propres de u, β la plus grande.

Montrez que $\inf\limits_{x \in S}(x, u(x)) = \alpha$ et $\sup\limits_{x \in B}(x, u(x)) = \sup\limits_{x \in S}(x, u(x)) = \beta$.

13) Un prolongement de l'exercice précédent.

Montrez que l'application $N : \mathscr{S}(E) \to \mathbb{R}_+$ définie par $N(u) = \sup\limits_{x \in B} |(x, u(x))|$ est une norme sur $\mathscr{S}(E)$.

Le théorème précédent a une version matricielle.

Théorème 4. *Une matrice réelle est orthosemblable à une matrice diagonale si et s.si elle est symétrique.*

On dit que les matrices symétriques réelles sont orthodiagonalisables.

Exercices :

14) Orthodiagonalisez la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. La condition « réelle » est indispensable dans le théorème spectral !

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique et pourtant n'est pas diagonalisable.

8 Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis-positifs

8.1 Endomorphismes auto-adjoints positifs

Définition. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

On dit que f est un endomorphisme auto-adjoint positif quand pour tout $x \in E$, $(f(x), x) \geqslant 0$.

On dit que f est un endomorphisme auto-adjoint défini-positif quand pour tout $x \in E - \{0\}$, $(f(x), x) > 0$.

On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs et $\mathscr{S}^{++}(E)$ celui des endomorphismes auto-adjoints définis-positifs. Attention, ces deux ensembles ne sont pas des s.e.v. et ne sont pas stables par composition.

Ces endomorphismes sont couramment présents dans les théories physiques et sont l'objet de propriétés spécifiques.

On donne par exemple une caractérisation simple à l'aide des valeurs propres.

Proposition 26. *Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.*

Alors $f \in \mathscr{S}^+(E)$ si et s.si les valeurs propres de f sont positives.

De même, $f \in \mathscr{S}^{++}(E)$ si et s.si les valeurs propres de f sont strictement positives.

En particulier, $\mathscr{S}^{++}(E) = \mathscr{S}^+(E) \cap GL(E)$.

8.2 Matrices symétriques positives

Définition. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est une matrice symétrique positive quand pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^\mathsf{T} AX \geqslant 0$.

On dit A est une matrice symétrique définie-positive quand pour tout $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $X^\mathsf{T} AX > 0$.

Les matrices symétriques positives (resp. definies-positives) sont donc les matrices dans des bases orthonormées des endomorphismes auto-adjoints positifs (resp. définis-positifs).

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies-positives. Attention, ces deux ensembles ne sont pas des s.e.v. et ne sont pas stables par composition.

Proposition 27. *Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.*

Alors $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et s.si les valeurs propres de A sont positives.

De même, $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et s.si les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercices :

15) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive. Montrez qu'il existe une matrice B symétrique et positive telle que $B^2 = A$. Montrez la même chose avec des matrices définies-positives.

    Remarque : dans le cas où A est définie-positive, B est unique (plus difficile à démontrer).