On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Q 1. Justifiez que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

Q 2. Montrez que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Q 3. Montrez que f a pour limite 0 en $+\infty$, puis montrez que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.

Q 4. Montrez que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donnez la valeur de $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Q 5. Montrez que f a pour limite $+\infty$ en 0.

Exercice hebdomadaire 10 - Corrigé

Q 1. Dans la suite, on pose $f_n(x) = e^{-n^2 x}$.

Pour $x \leqslant 0$, la suite $(f_n(x))$ ne converge par vers 0 donc la série $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-nx}$ et la série géométrique $\sum e^{-nx}$ converge (car $0 < e^{-x} < 1$), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ converge.

On a donc montré que la série $\sum f_n(x)$ converge si et s.si $x > 0$, *i.e.* $D_f =]0, +\infty[$.

Q 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a l'inégalité $|f_n'(x)| \leqslant n^2 e^{-na}$. Or la série $\sum n^2 e^{-na}$ converge, donc la série $\sum f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, +\infty[$.

D'après le th. de dérivation des séries, on en déduit que f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$. Puis par réunion d'intervalles, f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 e^{-n^2 x} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Q 3. Pour tout $x \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-n}$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} e^{-n}$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[1, +\infty[$.

Or pour tout $n \geqslant 1$, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$, donc d'après le th. de la double limite, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

De plus, pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) - e^{-x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-nx} = \dfrac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}} = o(e^{-x})$ quand $x \to +\infty$, donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}$.

Q 4.

Q 5. Pour $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, $f(x)$ est la somme d'une série à termes positifs, donc elle est plus grande que toutes les sommes partielles : $f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} e^{-n^2 x}$ (inégalité (1)).

Comme on sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$, d'après le th. de la limite monotone, f a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 0. Par passage à la limite dans l'inégalité (1) quand $x \to 0$, on en déduit que $\ell \geqslant \sum_{n=1}^{N} 1 = N$ (inégalité (2)).

Donc maintenant par passage à la limite dans (2) quand $N \to +\infty$, on obtient $\ell \geqslant +\infty$, donc $\ell = +\infty$.