Problème 1 - Moyennes prévisionnelles

On note E l'ensemble des suites réelles u définies sur $\mathbb{N}^*$ qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$$

Autrement dit, une suite est dans E quand le terme de rang n est la moyenne des n termes qui le suivent : on peut donc dire que le terme u_n permet de prévoir la moyenne des n suivants.

Question 1)

a) Montrez que les suites constantes sont éléments de E.

b) Montrez que pour tout $(u, v) \in E^2$, $u + v \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in E$ (note : on dit que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, notion que nous étudierons plus tard).

Question 2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k^p$.

a) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(k-1)^p \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} x^p \mathrm{d}x \leqslant k^p$.

b) Déduisez-en une constante K_p (dépendant de p) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_p n^{p+1} \leqslant S_n \leqslant (2^p - 1)n^p + K_p n^{p+1}$. Montrez alors que $S_n \sim K_p n^{p+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Vérifiez que $K_p \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Question 3) On veut montrer qu'il n'existe aucune suite de E de la forme $(P(n))$ où P est un polynôme de degré $p \geqslant 1$. On procède par l'absurde et on suppose donc qu'il existe un tel polynôme P de terme dominant $a\,X^p$ où $a > 0$ (en effet, quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer que $a > 0$).

a) Donnez un équivalent quand k tend vers $+\infty$ de $P(k)$.

Déduisez-en qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $P(k) \geqslant \dfrac{3}{4} a k^p$.

b) Montrez alors que pour tout $n \geqslant N$, $nP(n) \geqslant \dfrac{3}{4} a S_n$.

c) Montrez alors que $1 \geqslant \dfrac{3}{4} K_p$ et concluez.

Question 4) Un lemme fondamental.

Soit $u \in E$, $c \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $k \in [\![N+1, 2N]\!]$, $u_k \leqslant c$. Montrez que pour tout $k \in [\![1, 2N]\!]$, $u_k \leqslant c$.

Justifiez rapidement que le résultat précédent est encore vrai si on remplace $\leqslant$ par $\geqslant$.

Question 5) Montrez que si $u \in E$ et u est stationnaire (rappel : « stationnaire » signifie « constante à partir d'un certain rang »), alors u est constante.

Question 6) Montrez que si $u \in E$ et u est monotone, alors u est constante.

Question 7) Montrez que si $u \in E$ et u converge, alors u est constante.

Question 8) Étant donnés les résultats précédents, on peut se demander s'il existe des suites dans E non constantes. Répondez à cette question.

Remarque : on peut aussi montrer, mais c'est plus dur, que si une suite de E est minorée ou majorée, alors elle est constante. Donc s'il existe des suites non constantes dans E, elles ont un comportement oscillatoire d'amplitude croissante vers l'infini, donc difficilement prévisible...

Problème 2 - Étude d'une suite

Soit u la suite définie de la façon suivante : $u_0 \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1}$.

Question 1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

Question 2) Montrez que si u converge, alors sa limite est 1.

Question 3) On suppose dans cette question que u est strictement croissante.

a) Montrez que u diverge vers $+\infty$.

b) Montrez que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 0.

c) Déduisez-en que la suite u est décroissante à partir d'un certain rang.

d) Concluez : est-il possible que u soit strictement croissante ?

Question 4)

a) Écrivez la définition formalisée de « u est une suite strictement croissante », puis celle de sa négation.

b) Justifiez l'existence d'un rang k tel que $u_{k+1} \leqslant u_k$. Montrez alors que u est décroissante à partir du rang k.

c) Concluez l'exercice : que dire de la suite u ?

Problème 1

Question 1)

a) Si u est la suite constante égale à λ, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \lambda = \dfrac{1}{n} \times n\lambda = \lambda = u_n$.

Donc $u \in E$.

b) Soit $(u,v) \in E^2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$(u+v)_n = u_n + v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} v_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} (u_k+v_k) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} (u+v)_k$. Donc $u+v \in E$.

Soit $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda.u)_n = \lambda\, u_n = \lambda\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} (\lambda\, u_k) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} (\lambda.u)_k$. Donc $\lambda.u \in E$.

Question 2)

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [k-1,k]$, on a l'encadrement $(k-1)^p \leqslant x^p \leqslant k^p$, donc on peut intégrer cette inégalité valable sur tout l'intervalle $[k-1,k]$:

$\displaystyle\int_{k-1}^{k} (k-1)^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} x^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} k^p \mathrm{d}x$, ce qui donne $(k-1)^p \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} x^p \mathrm{d}x \leqslant k^p$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on additionne les inégalités précédentes pour k variant de $n+1$ à $2n$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} (k-1)^p \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} x^p \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} k^p$$

ce qui donne : $S_n + n^p - (2n)^p \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} x^p \mathrm{d}x = \int_{n}^{2n} x^p \mathrm{d}x \leqslant S_n$

Or $\displaystyle\int_{n}^{2n} x^p \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_n^{2n} = \frac{(2n)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} = \frac{2^{p+1}-1}{p+1} n^{p+1}$.

Donc $S_n + n^p(1-2^p) \leqslant \dfrac{2^{p+1}-1}{p+1} n^{p+1} \leqslant S_n$

ou encore en posant $K_p = \dfrac{2^{p+1}-1}{p+1}$, $K_p n^{p+1} \leqslant S_n \leqslant K_p n^{p+1} + (2^p - 1)n^p$.

On divise par $K_p n^{p+1}$, on obtient $1 \leqslant \dfrac{S_n}{K_p n^{p+1}} \leqslant 1 + \dfrac{2^p-1}{K_p}\dfrac{1}{n}$. On note que $1 + \dfrac{2^p-1}{K_p}\dfrac{1}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, donc d'après le th. d'encadrement, on a $\dfrac{S_n}{K_p n^{p+1}}$ tend vers 1 donc $S_n \sim K_p n^{p+1}$.

c) On veut montrer que $\dfrac{2^{p+1}-1}{p+1} \geqslant \dfrac{3}{2}$, ce qui revient à $2(2^{p+1}-1) \geqslant 3(p+1)$ ou $2^{p+2} \geqslant 3p+5$.

Soit $\mathscr{P}(p)$ la proposition précédente.

Pour $p = 1$, on a $2^{p+2} = 8 = 3p+5$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(p)$ est vraie, alors $2^{p+2} \geqslant 3p+5$, donc $2^{p+3} \geqslant 2(3p+5) = 6p+10 \geqslant 3p+8 = 3(p+1)+5$, donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie.

Question 3)

a) On sait que $P(k) \sim a\,k^p$ quand k tend vers $+\infty$ (voir cours). Donc par définition, le rapport $\dfrac{P(k)}{a\,k^p}$ tend vers 1 quand k tend vers $+\infty$, donc à partir d'un certain rang, ce rapport est au moins égal à $\dfrac{3}{4}$: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $P(k) \geqslant \dfrac{3}{4} a k^p$.

b) Soit $n \geqslant N$. Alors pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $k \geqslant N$, donc $P(k) \geqslant \dfrac{3}{4}ak^p$.

On additionne ces n inégalités : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} P(k) \geqslant \frac{3}{4}a \sum_{k=n+1}^{2n} k^p$.

Or la suite $(P(n))$ appartient à E donc $nP(n) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} P(k) \geqslant \frac{3}{4}aS_n$.

c) Quand n tend vers $+\infty$, $nP(n) \sim an^{p+1}$ et $S_n \sim K_p n^{p+1}$, donc en divisant l'inégalité précédente par an^{p+1}, on a $\dfrac{nP(n)}{an^{p+1}} \geqslant \dfrac{3}{4}\dfrac{S_n}{n^{p+1}}$ puis on passe à la limite (qui existent), donc $1 \geqslant \dfrac{3}{4}K_p$.

Or on a montré que $K_p \geqslant \dfrac{3}{2}$, donc $1 \geqslant \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{8}$: contradiction.

Donc il n'existe aucune suite de E de la forme $(P(n))$.

Question 4) On fait une récurrence descendante forte. Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition « $u_k \leqslant c$ ».

On sait que $\mathscr{P}(N+1), \dots, \mathscr{P}(2N)$ sont vraies.

Si $2 \leqslant k \leqslant N$ et $\mathscr{P}(k), \dots, \mathscr{P}(2N)$ sont vraies, alors $u_{k-1} = \dfrac{1}{k-1}\displaystyle\sum_{j=k}^{2(k-1)} u_j \leqslant \frac{1}{k-1}\sum_{j=k}^{2(k-1)} c = \frac{1}{k-1} \times (k-1)c = c$, donc $P(k-1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence forte, on en déduit que $\mathscr{P}(1), \dots, \mathscr{P}(2N)$ sont vraies.

Si on retourne les inégalités, le résultat est encore vrai (même preuve). Et donc dans le cas d'une égalité, on obtient encore la même chose.

Question 5) Si u est stationnaire, alors à partir d'un certain rang N, tous les termes sont égaux à une constante λ, donc en particulier tous ceux d'indices compris entre $N+1$ et $2N$. D'après le lemme précédent, tous les termes précédents sont encore égaux à λ, donc finalement ils sont tous égaux à λ, donc la suite est constante.

Question 6) Soit $u \in E$, u croissante.

Soit $N \geqslant 2$. Pour tout $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant u_N$ donc en particulier pour tout $k \in [\![N+1, 2N]\!]$, $u_k \geqslant u_N$, donc d'après le lemme, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, 2N]\!]$, $u_k \geqslant u_N$. En particulier, $u_{N-1} \geqslant u_N$.

Or $u_N \geqslant u_{N-1}$ car u est croissante. Donc $u_N = u_{N-1}$.

On a donc montré : $\forall N \geqslant 2 \quad u_N = u_{N-1}$, ce qui signifie que u est constante.

Question 7) Soit u une suite de E qui converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon$.

En particulier pour tout $k \in [\![N+1, 2N]\!]$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon$, donc d'après le lemme, pour tout $k \in [\![1, 2N]\!]$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon$.

On a donc montré que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que k soit plus grand que N ou plus petit, on a toujours $\ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon$.

Résumons : $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon$.

On fait tendre ε vers 0, on a alors $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \ell \leqslant u_k \leqslant \ell$. La suite u est donc constante égale à ℓ.

Question 8) Soit $u_1 = 0$.

Pour avoir $u \in E$, il faut que

$u_1 = \dfrac{1}{1}u_2 = u_2 = 0$; $u_2 = \dfrac{1}{2}(u_3 + u_4)$ donc $u_3 + u_4 = 0$: on choisit $u_3 = -1$ et $u_4 = 1$; puis $u_3 = \dfrac{1}{3}(u_4 + u_5 + u_6)$ donc $u_5 + u_6 = 3u_3 - u_4 = -4$: on a deux paramètres dont on fait ce qu'on veut u_5 et u_6 du moment que $u_5 + u_6 = -4$, on choisit par exemple $u_5 = -1$ et donc $u_6 = -3$; puis $u_4 = \dfrac{1}{4}(u_5 + u_6 + u_7 + u_8)$: $u_5 + u_6$ est fixé mais il reste deux paramètres dont on fait ce qu'on veut, du moment que $u_7 + u_8 = 4u_4 - u_5 - u_6$, on choisit par exemple $u_7 = -1$ et u_8 comme il faut pour que ça marche...

Par récurrence, si on connaît les termes $u_0, \dots, u_{2n}$, alors $u_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}(u_{n+3} + \dots + u_{2n} + u_{2n+1} + u_{2n+2})$: il reste deux paramètres u_{2n+1} et u_{2n+2} dont on fait ce qu'on veut, du moment que $u_{2n+1} + u_{2n+2} = (n+2)u_{n+2} - u_{n+3} - \dots - u_{2n}$, on choisit par exemple $u_{2n+1} = -1$ et u_{2n+2} comme il faut.

Conclusion : on peut construire une suite u de E non constante en choisissant les termes $u_{2k+1} = -1$ et u_{2k+2} comme il faut...

Problème 2

Question 1) Par récurrence : soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « u_n existe et $u_n \geqslant 1$ ».

$u_0 \geqslant 0$ donc $\sqrt{u_0}$ existe, donc u_1 existe et $u_1 = \sqrt{u_0} + 1 \geqslant 1$: $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors en particulier $u_n \geqslant 0$ donc $\sqrt{u_n}$ existe donc u_{n+1} existe. De plus, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1} \geqslant \sqrt{u_n} \geqslant 1$ car $u_n \geqslant 1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 2) Si u converge vers ℓ, alors d'une part, (u_{n+1}), suite extraite de u, converge aussi vers ℓ. D'autre part, la suite u étant positive, sa limite l'est aussi, donc d'après le th. de composition des limites, la suite $(\sqrt{u_n})$ converge vers $\sqrt{\ell}$, donc d'après les th. d'opérations sur les limites, (u_{n+1}) converge aussi vers $\sqrt{\ell}$.

Par unicité de la limite, on en déduit que $\ell = \sqrt{\ell}$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or la suite u est minorée par 1 à partir du rang 1, donc $\ell = 1$.

Question 3)

a) On a montré que $u_1 \geqslant 1$, donc $u_2 = \sqrt{u_1} + \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{3}{2}$. Comme u est croissante, elle est donc minorée par $\dfrac{3}{2}$ à partir du rang 2.
   La suite u est strictement croissante donc elle converge ou diverge vers $+\infty$ d'après le th. de la limite monotone. Si elle converge, alors sa limite est 1 d'après la question précédente. Or à partir du rang 2, u est minorée par $\dfrac{3}{2}$: contradiction.
   Donc u diverge vers $+\infty$.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} + \dfrac{1}{(n+1)u_n}$: il est alors évident que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0 d'après les th. d'opérations sur les limites et le fait que u diverge vers $+\infty$.

c) La suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 0, donc à partir d'un certain rang, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, autrement dit la suite u est strictement décroissante à partir d'un certain rang.

d) On a donc montré que si u est strictement croissante, alors elle est strictement décroissante à partir d'un certain rang : contradiction.
   Il est donc impossible que u soit strictement croissante.

Question 4)

a) « u est une suite strictement croissante » signifie : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$.
   Sa négation est donc : $\exists n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$.
   On sait d'après la question précédente que u n'est pas strictement croissante, donc en écrivant la négation de « $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$ », on obtient qu'il existe un rang k tel que $u_{k+1} \leqslant u_k$.

b) Par récurrence, on pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
   $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
   Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc $\sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$; de plus, $\dfrac{1}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc en additionnant les deux inégalités on obtient $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant k$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   La suite u est donc décroissante à partir d'un certain rang.

c) La suite u est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 1 à partir du rang 1, donc d'après le th. de la limite monotone, u converge. Et d'après la question 2, elle converge vers 1.