Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 3$. Soit (a, b) une famille libre de deux vecteurs unitaires.

On pose alors $f(x) = (a|x).a + (b|x).b$ pour tout $x \in E$.

Q 1. Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint.

Q 2. Déterminer le noyau et l'image de f, ainsi que leurs dimensions.

Q 3. Déterminer le spectre et une base de vecteurs propres de f.

Exercice hebdomadaire 11 - Corrigé

Q 1. f est clairement un endomorphisme de E par linéarité à droite du produit scalaire.

Pour tout $(x,y)\in E^2$, $(f(x)|y) = ((a|x).a+(b|x).b|y) = (a|x)(a|y)+(b|x)(b|y)$, formule où x et y jouent le même rôle, donc $(f(x)|y) = (x|f(y)$. L'endomorphisme f est dont auto-adjoint.

Q 2. Pour $x\in \operatorname{Ker} f$, on a $(a|x).a+(b|x).b=0$, or (a,b) est libre, donc $(a|x)=(b|x)=0$ donc $x\in \operatorname{vect}(a,b)^{\perp}$.

Réciproquement, il évident que si $x\in\operatorname{vect}(a,b)^{\perp}$, alors $(a|x)=(b|x)=0$ donc $f(x)=0$.

On a donc montré que $\operatorname{Ker} f=\operatorname{vect}(a,b)^{\perp}$, espace de dimension $n-2$.

Le th. du rang prouve donc que $\dim \operatorname{Im} f=2$, or de manière évidente $\operatorname{Im} f\subset \operatorname{vect}(a,b)$, donc il y a égalité : $\operatorname{Im} f=\operatorname{vect}(a,b)$.

Q 3. $\dim \operatorname{Ker} f = n-2$ donc 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-2$. Mais comme f est auto-adjoint, donc diagonalisable, 0 est valeur propre d'ordre exactement $n-2$.

f a donc deux autres valeurs propres non nulles, éventuellement confondues, α et β. Leurs vecteurs propres associés sont nécessairement dans $\operatorname{Im} f$, donc on étudie l'endormophisme g induit par f dans $\operatorname{Im} f$: ses deux valeurs propres sont α et β.

Or dans la base (a,b) de $\operatorname{Im} f$, g a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & (a|b) \\ (a|b) & 1 \end{pmatrix}$, donc son polynôme caractéristique est $X^2-2X+(1-(a|b)^2)$, donc les deux autres valeurs propres sont les racines de ce polynôme, qui sont $1-(a|b)$ et $1+(a|b)$. On remarque que des vecteurs propres associés sont $a+b$ et $a-b$.

Une base de vecteurs propres de f est donc une famille $(e_1,\dots,e_{n-2},a+b,a-b)$ où $(e_1,\dots,e_{n-2})$ est une base de $\operatorname{vect}(a,b)^{\perp}$: on peut l'obtenir en complétant la famille (a,b) en une base de E et en appliquant l'algorithme d'orthogonalisation de Schmidt.