Soit E un espace euclidien, p, q deux projecteurs orthogonaux. On pose $u = p - q$.

Q 1. Montrer que u est auto-adjoint. Que peut-on en déduire ?

Q 2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset [-1, 1]$: on rappelle que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Q 3. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Im}\, p$. Déterminer de même $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.

Dans la suite, λ est une valeur propre de u qui n'est ni -1, ni 1, ni 0 et x est un vecteur propre associé.

Q 4. Montrer que la famille $(p(x), q(x))$ est libre. On pose $F = \mathrm{vect}(p(x), q(x))$.

Q 5. Montrer que F est un sous-espace stable par u. On note alors v l'endomorphisme induit par u dans F.

Q 6. En calculant $\mathrm{tr}(v)$, montrer que $-\lambda$ est aussi une valeur propre de u.

Exercice hebdomadaire 12 - Corrigé

Q 1. p et q sont deux projecteurs orthogonaux, donc ils sont auto-adjoints, donc $u^* = (p-q)^* = p^* - q^* = p - q = u$: u est donc auto-adjoint et donc diagonalisable d'après le th. spectral.

Q 2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Alors $u(x) = p(x) - q(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$.

$\langle u(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2 = \langle p(x), x\rangle - \langle q(x), x\rangle = \|p(x)\|^2 - \|q(x)\|^2$, car pour un projecteur orthogonal, d'après le cours, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle$.

Donc $\lambda\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 - \|q(x)\|^2 \leqslant \|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$: comme $\|x\|^2 > 0$, on en déduit que $\lambda \leqslant 1$.

De même, $\lambda\|x\|^2 \geqslant -\|q(x)\|^2 \geqslant -\|x\|^2$: comme $\|x\|^2 > 0$, on en déduit que $\lambda \geqslant -1$.

Q 3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Alors $u(x) = x$ donc d'après la première inégalité précédente avec $\lambda = 1$,

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 - \|q(x)\|^2 \leqslant \|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$$

donc en fait il y a égalité partout : $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2$ et donc $\|q(x)\|^2 = 0$, ce qui donne $x \in \mathrm{Ker}\, q$ et $p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p$.

Ceci prouve donc l'inclusion $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Im}\, p$. Comme l'inclusion réciproque est immédiate, on a bien l'égalité.

La même démarche montre aussi que $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.

Q 4. D'abord, on note que $q(x) \neq 0$, sinon on a $u(x) = p(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$ donc λ est une valeur propre d'un projecteur, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

Ensuite, si la famille $(p(x), q(x))$ est liée, alors comme $q(x) \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = \alpha q(x)$, donc $u(x) = \lambda x = (\alpha - 1)q(x)$.

Si $\alpha = 1$, alors $\lambda x = 0$, or $x \neq 0$, donc $\lambda = 0$, ce qui est encore contradictoire avec l'hypothèse.

Donc $\alpha \neq 1$ et $q(x) = \dfrac{\lambda}{\alpha - 1}x$. Mais alors $\dfrac{\lambda}{\alpha - 1}$ est une valeur propre d'un projecteur donc $\dfrac{\lambda}{\alpha - 1} = 0$ ou $\dfrac{\lambda}{\alpha - 1} = 1$, ce qui donne $\lambda = 0$ (impossible encore) ou $\lambda = \alpha - 1 \neq 0$, donc $q(x) = x$, puis $p(x) = \alpha x$, donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, donc $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$, ce qui est encore contradictoire.

Dans tous les cas, on a contradiction, donc on a montré par l'absurde que la famille $(p(x), q(x))$ est libre.

Q 5. Il suffit de montrer que $u(p(x)) \in F$ et $u(q(x)) \in F$ pour montrer la stabilité de F par u.

$u(p(x)) = (p - q) \circ p(x) = p(x) - q \circ p(x)$ (car $p \circ p = p$), or $u(x) = p(x) - q(x) = \lambda x$, donc $p(x) = q(x) + \lambda x$ donc $q \circ p(x) = q(x) + \lambda q(x) = (1 + \lambda)q(x)$, donc finalement $u(p(x)) = p(x) - (1 + \lambda)q(x) \in F$.

De même, $u(q(x)) = (p - q) \circ q(x) = p \circ q(x) - q(x) = p(p(x) - \lambda x) - q(x) = (1 - \lambda)p(x) - q(x) \in F$.

Q 6. La question précédente montre de plus que dans la base $(p(x), q(x))$ de F, la matrice de v est $\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -1-\lambda & -1 \end{pmatrix}$.
Donc $\mathrm{tr}(v) = 0$.

Or $x = \dfrac{1}{\lambda}(p(x) - q(x)) \in F$, donc x est aussi un vecteur propre de v pour la valeur propre λ.

Comme la trace de v est nulle et que λ est valeur propre de v, on en déduit que $-\lambda$ est aussi valeur propre de v donc de u !