# A. Préliminaires sur les matrices symétriques

1. <u>$\Rightarrow$ :</u> On suppose que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel : $(X, Y) \mapsto (X \mid Y) = X^\mathsf{T} Y$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

   Selon le théorème spectral, S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses sous espace propres sont deux à deux orthogonaux

   On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A (éléments de $\mathbb{R}_+^*$) et on a $\overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant r}} E_{\lambda_i}(S) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On peut écrire $X = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$ où les $X_i \in E_{\lambda_i}(S)$ sont non tous nuls

   On a a donc

   $$X^\mathsf{T} S X = (X \mid SX) = (\sum_{i=1}^{r} X_i \mid \sum_{j=1}^{r} S X_j) = (\sum_{i=1}^{r} X_i \mid \sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \lambda_j (X_i \mid X_j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \|X_i\|^2 > 0$$

   <u>$\Leftarrow$ :</u> On suppose $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\mathsf{T} S X > 0$

   Soit $\lambda$ une valeur propre de S. On considère X un vecteur colonne propre de S associé à $\lambda$.

   On a $X^\mathsf{T} S X = X^\mathsf{T}(\lambda X) = \lambda X^\mathsf{T} X = \lambda \|X\|^2$

   ainsi $\lambda \|X\|^2 > 0$ or $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0$ donc $\lambda > 0$

   <u>**Conclusion :**</u> On a montré

   $\boxed{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\mathsf{T} S X > 0}$

2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

   Je note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^+$ les valeur propres de S comptées avec multiplicité

   Le théorème spectral, nous fournit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A_s = \Omega^\mathsf{T} \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Omega$

   En prenant $R = \Omega^\mathsf{T} \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega$,

   on a $R^2 = \Omega^\mathsf{T} \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega \Omega^\mathsf{T} \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega = \Omega^\mathsf{T} \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^2 \Omega = B$ car $\Omega \Omega^\mathsf{T} = I_n$

   Ainsi $\boxed{\text{pour tout } S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ il existe } R \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } S = R^\mathsf{T} R}$

   Réciproquement soit $R \in GL_n(\mathbb{R})$. Posons $S = R^\mathsf{T} R$.

   On a $S^\mathsf{T} = R^\mathsf{T} \left(R^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = R^\mathsf{T} R = S$ donc $R^\mathsf{T} R \in S_n(\mathbb{R})$

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

   On a $X^\mathsf{T} S X = (RX)^\mathsf{T} RX = \|RX\|$

   or $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$, d'où RX est non nul et ainsi $\|RX\| > 0$

   $\boxed{\text{On a montré que pour tout } R \in GL_n(\mathbb{R}),\ R^\mathsf{T} R \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$

3. Soit S et $T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in [0, 1]$.

   On a $\lambda S + (1 - \lambda) T \in S_n(\mathbb{R})$ car $S_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel.

   De plus Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

   On a $X^\mathsf{T} \left(\lambda S + (1 - \lambda) T\right) X = \lambda X^\mathsf{T} S X + (1 - \lambda) X^\mathsf{T} T X \geqslant 0$ par somme et produit.

   Si $\lambda \neq 0$, alors $X^\mathsf{T} \left(\lambda S + (1 - \lambda) T\right) X \geqslant \lambda X^\mathsf{T} S X > 0$

   et si $\lambda = 0$, alors $X^\mathsf{T} \left(\lambda S + (1 - \lambda) T\right) X = X^\mathsf{T} T X > 0$

   Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble } S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est convexe}}$

## B. Autres préliminaires

4. $\boxed{\text{En prenant } \Phi : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1} \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \in \mathrm{E}, \text{ on a } \mathrm{Conv(K)} = \Phi(\mathcal{H} \times \mathrm{K}^{n+1})}$

   On remarque que $\Phi$ est continue par théorèmes généraux. De même les applications notées : $\varphi_i : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \lambda_i$ pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ et $\mathrm{S} : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$ sont continues car linéaires.

   Or $\mathcal{H} = \left( \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^+) \right) \bigcap \mathrm{S}^{-1}(\{1\})$

   donc $\mathcal{H}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ par intersection et car une image réciproque par une application continue d'un fermé est un fermé de l'ensemble de départ.

   De plus $\mathcal{H}$ est borné car $\mathcal{H} \subset [0, 1]^{n+1}$

   Ainsi $\mathcal{H}$ est une partie compacte car fermée-bornée en dimension finie

   Par produit de compacts, $\mathcal{H} \times \mathrm{K}^{n+1}$ est un compact.

   Par image d'une partie compacte par une application continue $\boxed{\text{Conv(K) est un sous-ensemble compact de E}}$

5. Utilisons l'indication en se donnant $(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E.

   Si $n = 1$, alors $g$ est une homothétie de rapport noté $\lambda$ et on a $\forall x \in \mathrm{E}$, $\|g(x)\| = |\lambda| \, \|x\|$

   Si $n > 1$. Soit alors $i \in \{2, \ldots, n\}$.

   On a $(e_1 + e_i | e_1 - e_i) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$ (diagonales du losange)

   donc $0 = (g(e_1 + e_i) | g(e_1 - e_i)) = (g(e_1) + g(e_i) | g(e_1) - g(e_i)) = \|g(e_1)\|^2 - \|g(e_i)\|^2$

   donc en notant $k = \|g(e_1)\|$, on a $k \geqslant 0$ et $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(g(e_i) | g(e_i)) = k^2$

   et aussi pour tout $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(g(e_i) | g(e_j)) = 0$ car $(e_i | e_j) = 0$

   Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{E}$ où les $x_i$ sont réels.

   On a $\|g(x)\|^2 = \left( \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i) \Big| \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i) \right) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j (g(e_i) | g(e_j))$

   donc $\|g(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 k^2 = k^2 \|x\|^2$

   On a montré que $\boxed{\text{il existe un nombre réel positif } k \text{ tel que pour tout } x \in \mathrm{E},\ \|g(x)\| = k\|x\|}$

   Si $k = 0$ alors $g$ est la composée de l'homothétie de rapport 0 et l'identité.

   Si $k \neq 0$, alors $g$ est la composée de l'homothétie de rapport $k$ et de $\frac{1}{k} g$

   or $\frac{1}{k} g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\frac{1}{k} g$ conserve la norme donc il s'agit d'un endomorphisme orthogonal.

   Dans tous les cas, $\boxed{g \text{ est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal}}$

6. D'après le cours, on sait que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

   Pour la compacité, il suffit d'établir le caractère fermé-borné car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

   Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{A}^\mathsf{T} \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ donc $\|\mathrm{A}\|_2 = \sqrt{(\mathrm{A}|\mathrm{A})} = \sqrt{n}$ où $\| \cdot \|_2$ désigne la norme euclidienne.

   Ainsi $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   L'application $\psi : \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{A}^\mathsf{T} \mathrm{A}$ est continue car polynomiale en les coefficients de l'argument.

   Donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   d'où $\boxed{\text{le groupe orthogonal } \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe compact du groupe linéaire } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$

## C. Quelques propriétés de la compacité

7. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente.
Ainsi la suite $\left(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers 0
ceci nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant \mathrm{N}$, on ait $\|x_{\varphi(p+1)} - x_{\varphi(p)}\| \geqslant \varepsilon$
Absurde
Ainsi $\boxed{\text{cette suite n'admet aucune suite extraite convergente}}$

8. Par l'absurde, on suppose que la propriété à démontrer est fausse,
ceci nous fournit $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de E on ait $\mathrm{K} \not\subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$
On va construire par récurrence :
une suite $(x_k)_{k \geqslant 1}$ à valeurs dans K telle que pour tout entier naturel $n \neq p$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$
Par hypothèse, on a $\mathrm{K} \not\subset \mathrm{B}(a_1, \varepsilon)$ pour tout $a_1 \in \mathrm{E}$, ce qui nous fournit $x_1 \in \mathrm{K} \setminus \mathrm{B}(a_1, \varepsilon)$
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On suppose construits $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{K}$ tel que pour tout entier naturel $n \neq p \in [\![1, k]\!]$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$
On a alors $\mathrm{K} \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$
ce qui nous fournit $x_{k+1} \in \mathrm{K}$ tel que pour tout entiers naturels $n \neq p \in [\![1, k+1]\!]$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$
La suite ainsi construite $(x_k)_{k \geqslant 1}$ vérifie pour tout entiers naturels $n \neq p$, on a $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$
D'après **7**, cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence
Or il s'agit d'une suite à valeurs dans le compact K, ce qui est absurde
Ainsi $\boxed{\text{pour tout réel } \varepsilon > 0, \text{ il existe un entier } p > 0 \text{ et } x_1, \ldots, x_p \text{ éléments de E tels que } \mathrm{K} \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)}$

9. Par l'absurde, on suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $x \in \mathrm{K}$, tel que pour tout $i \in \mathrm{I}$, on ait $\mathrm{B}(x, \alpha) \not\subset \Omega_i$.
Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, ceci nous fournit $x_n \in \mathrm{K}$ tel que pour tout $i \in \mathrm{I}$, on ait $\mathrm{B}(x_n, 1/n) \not\subset \Omega_i$.
La suite $(x_n)$ à valeurs dans le compact K admet une extractrice qui $(x_{\varphi_n})$ qui converge vers une valeur d'adhérence $\ell \in \mathrm{K}$.
Comme $\mathrm{K} \subseteq \displaystyle\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \Omega_i$, ceci nous fournit $j \in \mathrm{I}$ tel que $\ell \in \Omega_j$.
Comme $\Omega_j$ est un ouvert, ceci nous fournit $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\ell, r) \subset \Omega_j$.
Comme $(x_{\varphi_n})$ converge vers $\ell$, ceci nous fournit $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_1$, $\|x_{\varphi_n} - \ell\| \leqslant r/3$
Comme $\left(\dfrac{1}{\varphi_n}\right)$ converge vers 0, ceci nous fournit $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_2$, $\frac{1}{\varphi_n} \leqslant r/3$
On pose $p = \mathrm{Max}\left(\varphi_{\mathrm{N}_1}, \varphi_{\mathrm{N}_2}\right)$
et comme $2r/3 < r$, on a d'après l'inégalité triangulaire : $\mathrm{B}\left(x_p, \frac{1}{p}\right) \subset \mathrm{B}(\ell, r)$
ce qui absurde par construction de de la suite $(x_n)$. Ainsi
$\boxed{\text{il existe un réel noté } \alpha > 0 \text{ tel que pour tout } x \in \mathrm{K}, \text{ il existe } i \in \mathrm{I} \text{ tel que } \mathrm{B}(x, \alpha) \text{ soit contenue dans l'ouvert } \Omega_i}$
Lors de la question précédente, on pouvait obtenir de façon analogue l'existence d'un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de K (*preuve identique que pour* E) tels que $\mathrm{K} \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^{p} \mathrm{B}(x_j, \varepsilon)$
Pour $j \in [\![1, p]\!]$, ce qui est fait au dessus nous fournit $i_j \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{B}(x_j, \alpha) \subseteq \Omega_{i_j}$
d'où $\boxed{\text{l'existence d'une sous-famille finie } (\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_p}) \text{ de la famille } (\Omega_i)_{i \in \mathrm{I}} \text{ telle que } \mathrm{K} \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}}$

10. Je note pour $i \in \mathrm{I}$, $\mathrm{O}_i = \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}_i$ qui est un ouvert de E par complémentaire et on a $\mathrm{K} \subseteq \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{O}_i$

    La question précédente nous fournit une sous famille finie $(\mathrm{O}_{i_1}, \ldots, \mathrm{O}_{i_p})$ telle que $\mathrm{K} \subseteq \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{O}_{i_k}$.

    On a donc $\mathrm{K} \bigcap \left( \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{F}_{i_k} \right) = \emptyset$

    Comme pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a $\mathrm{F}_i \subset \mathrm{K}$ : $\boxed{\text{la sous famille finie } (\mathrm{F}_{i_1}, \ldots, \mathrm{F}_{i_p}) \text{ vérifie } \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{F}_{i_k} = \emptyset}$

## D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

11. Soit $x, y \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons : $\begin{cases} (i) & \mathrm{N_G}(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}^+ \textit{ (aspect bien défini et positivité)} \\ (ii) & \mathrm{N_G}(x+y) \leqslant \mathrm{N_G}(x) + \mathrm{N_G}(y) \textit{ (inégalité triangulaire )} \\ (iii) & \mathrm{N_G}(\lambda x) = |\lambda| \cdot \mathrm{N_G}(x) \textit{ (homgénéité)} \\ (iv) & \mathrm{N_G}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \textit{ (caractère défini )} \end{cases}$

    **Pour (i) :** L'application $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \longmapsto u(x) \in \mathrm{E}$ est linéaire et $\dim(\mathcal{L}(\mathrm{E})) < +\infty$ donc elle est continue.
    Ainsi cette application est bornée sur le compact G
    donc $\{\|u(x)\| \,/\, u \in \mathrm{G}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}^+$
    d'où l'existence dans $\mathbb{R}^+$ de $\mathrm{N_G}(x) = \sup_{u \in \mathrm{G}} \|u(x)\|$.

    **Pour (ii) :** Soit $u \in \mathrm{G}$. On a : $\|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\|$.
    donc $\|u(x+y)\| \leqslant \mathrm{N_G}(x) + \mathrm{N_G}(y)$
    Comme c'est vrai pour tout $u \in \mathrm{G}$, on a bien $\mathrm{N_G}(x+y) \leqslant \mathrm{N_G}(x) + \mathrm{N_G}(y)$

    **Pour (iii) :** Si $\lambda = 0$, on a l'égalité car $\mathrm{N_G}(\lambda x) = 0 = |\lambda| \cdot \mathrm{N_G}(x)$
    On suppose $\lambda \neq 0$.
    Soit $u \in \mathrm{G}$. On a $\|u(\lambda x)\| = |\lambda| \cdot \|u(x)\| \leqslant |\lambda| \cdot \mathrm{N_G}(x)$
    Comme c'est vrai pour tout $u$ de G, on obtient : $\mathrm{N_G}(\lambda x) \leqslant |\lambda| \cdot \mathrm{N_G}(x)$
    On applique cette inégalité au scalaire $1/\lambda$ et au vecteur $\lambda x$ : $\mathrm{N_G}(x) \leqslant |1/\lambda| \cdot \mathrm{N_G}(\lambda x)$
    donc $\mathrm{N_G}(\lambda x) \geqslant |\lambda| \cdot \mathrm{N_G}(x)$
    D'où l'égalité.

    **Pour (iv) :** On suppose $\mathrm{N_G}(x) = 0$.
    Donc $\forall u \in \mathrm{G},\ \|u(x)\| = 0$ en particulier pour $u = \mathrm{Id_E}$ car G sous groupe de GL(E).
    donc $x = 0$

    On a montré que $\boxed{\mathrm{N_G} \text{ est bien définie et que c'est une norme sur E}}$

12. • Soit $u \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{E}$.
    L'application $v \longmapsto v \circ u$ est une bijection du groupe G dans lui-même de bijection réciproque $v \longmapsto v \circ u^{-1}$
    donc $\mathrm{N_G}(u(x)) = \sup_{v \in \mathrm{G}} \|v \circ u(x)\| = \sup_{w \in \mathrm{G}} \|w(x)\| = \mathrm{N_G}(x)$.
    Ainsi $\boxed{\text{pour tous } u \in \mathrm{G} \text{ et } x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N_G}(u(x)) = \mathrm{N_G}(x)}$

    • Soit $x, y \in \mathrm{E}$ tel que $x$ est non nul.
    $\Leftarrow$ : On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lambda x = y$.
    Pour tout $u \in \mathrm{G}$, on a $\|u(x+y)\| = (1+\lambda) \cdot \|u(x)\|$ car $1 + \lambda \geqslant 0$
    En faisant comme pour l'homogénéité, on obtient : $\mathrm{N_G}(x+y) = (1+\lambda)\mathrm{N_G}(x)$

donc $\mathrm{N_G}(x+y) = \mathrm{N_G}(x) + \mathrm{N_G}(y)$ car $\lambda \geqslant 0$ et $\mathrm{N_G}$ est une norme

$\underline{\Rightarrow :}$ On suppose que $\mathrm{N_G}(x+y) = \mathrm{N_G}(x) + \mathrm{N_G}(y)$.

Le théorème des bornes atteintes avec l'application continue définie sur le compact G : $u \longmapsto \|u(x)\|$ nous fournit $v \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{N_G}(x+y) = \|v(x+y)\|$

On note $x' = v(x)$ et $y' = v(y)$ de sorte que : $\mathrm{N_G}(x+y) = \|x'+y'\|$

et avec ce qui précède, on a $\mathrm{N_G}(x) + \mathrm{N_G}(y) = \mathrm{N_G}(x') + \mathrm{N_G}(y')$

donc $\|x'+y'\| = \mathrm{N_G}(x') + \mathrm{N_G}(y')$

Ainsi $\mathrm{N_G}(x') + \mathrm{N_G}(y') \leqslant \|x'\| + \|y'\|$ en utilisant l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$

or $\mathrm{N_G}(x') \geqslant \|x'\|$ et $\mathrm{N_G}(y') \geqslant \|y'\|$ car $\mathrm{Id_E} \in \mathrm{G}$

donc $\|x'+y'\| = \mathrm{N_G}(x') + \mathrm{N_G}(y') = \|x'\| + \|y'\|$

En élevant au carré on trouve après simplification : $2(x' \mid y') = 2\|x'\| \times \|y'\|$ (*)

donc $(x', y')$ lié d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

comme $x' \neq 0$ car $v \in \mathrm{GL(E)}$, ceci nous fournit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x' = y'$ (**)

En injectant dans (*) : $2\lambda \cdot \|x'\|^2 = 2|\lambda| \cdot \|x'\|^2$

d'où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ car $\|x'\| > 0$.

En appliquant $v^{-1}$ à (**), on a : $\lambda x = y$. On bien :

$$\boxed{\text{pour tous } x, y \in \mathrm{E} \text{ avec } x \text{ non nul, } \mathrm{N_G}(x+y) = \mathrm{N_G}(x) + \mathrm{N_G}(y) \text{ si et seulement si } \lambda x = y \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^+}$$

13. Soit $x \in \mathrm{K}$.

Comme K est stable par $u$, on montre par récurrence sur $i$ que $u^i(x) \in \mathrm{K}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Ainsi $x_n$ est le barycentre du système pondéré $\left((u^i(x), 1)\right)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ à coefficients positifs,

comme K est convexe, on a $x_n \in \mathrm{K}$.

Ainsi comme K est compact :

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est à valeurs dans K et admet une suite extraite convergente vers un élément } a \text{ de K}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n}\|u^n(x) - x\|$

donc $\boxed{\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \dfrac{\delta(\mathrm{K})}{n}}$ car $x$ et $u^n(x) \in \mathrm{K}$

Notons $\varphi$ une extractrice telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $a$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \dfrac{\delta(\mathrm{K})}{\varphi(n)}$ et de plus $\dfrac{\delta(\mathrm{K})}{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Comme l'application $y \mapsto u(y) - y$ est continue (linéaire en dimension finie),

alors $\left(u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $u(a) - a = 0$, ainsi $\boxed{\text{l'élément } a \text{ de K est un point fixe de } u}$

14. Soit $x \in \mathrm{K}$. $u(x)$ est le barycentre $((u_i(x), 1))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de points de K affectés de coefficients positifs

donc $u(x) \in \mathrm{K}$ car K convexe ainsi $\boxed{\text{K est stable par } u}$ Comme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, par combinaison linéaire,

on peut appliquer 13, pour en déduire : $\boxed{\text{l'existence de } a \in \mathrm{K} \text{ tel que } u(a) = a}$

15. Comme $u(a) = a$, on a $\mathrm{N_G}\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \mathrm{N_G}\left(u(a)\right) = \mathrm{N_G}(a)$

et d'après le premier point de 12, on a $\mathrm{N_G}(u_i(a)) = \mathrm{N_G}(a)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$

d'où $\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mathrm{N_G}(u_i(a)) = \dfrac{r}{r}\mathrm{N_G}(a)$. On a bien $\boxed{\mathrm{N_G}\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mathrm{N_G}(u_i(a))}$

Ainsi par homogénéité : $\mathrm{N_G}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mathrm{N_G}(u_i(a))$ car $r \geqslant 0$

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$. Avec ce qui précède et en utilisant l'inégalité triangulaire pour $\mathrm{N_G}$, on a :

$$\mathrm{N_G}\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leqslant \mathrm{N_G}(u_j(a)) + \mathrm{N_G}\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \mathrm{N_G}\left(u_i(a)\right) = \mathrm{N_G}\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right)$$

donc on a bien $\boxed{\mathrm{N_G}\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) = \mathrm{N_G}(u_j(a)) + \mathrm{N_G}\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right)}$

16. Soit $j \in \{1, \dots, r\}$.
On suppose dans un premier temps que $u_j(a)$ est un vecteur non nul de E.
En appliquant le deuxième point de 12, à la question précédente,
on obtient l'existence de $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a) = \lambda_j u_j(a)$
donc $ru(x) = \lambda_j u_j(a) + u_j(a)$ ce qui permet de conclure dans ce cas car $r > 0$
Dans un deuxième temps, si $u_j(a)$ est le vecteur nul de E alors $a = 0$ car $u_j \in \mathrm{GL(E)}$
et en prenant $\lambda_j = 1$ on a $u(a) = 0$ et $\dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a) = 0$ car $u$ et $u_j$ linéaires
$\boxed{\text{pour tout } j \in \{1, \dots, r\}, \text{ on a l'existence d'un nombre réel } \lambda_j \geqslant 0 \text{ tel que } u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)}$ dans tous les cas.

17. On suppose par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $a$ ne soit pas un point fixe de l'endomorphisme $u_i$.
On a : $a = u(a) = \dfrac{\lambda_i + 1}{r} u_i(a)$ donc $u_i(a) = \mu a$ où $\mu = \dfrac{r}{\lambda_i + 1} > 0$ car $r > 0$ et $\lambda_i \geqslant 0$
On a donc $\mu \neq 1$ et $a \neq 0$.
<u>Premier cas :</u> si $\mu > 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_i^k(a) = \mu^k a$
Comme K est stable par $u_i$ alors la suite $(u_i^k(a))_k$ est à valeurs dans K (récurrence immédiate)
Comme K est bornée car compact, alors cette suite est bornée. Or $\|u_i^k(a)\| = \mu^k \cdot \|a\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
Absurde.
<u>Deuxième cas :</u> si $\mu < 1$, alors on a $u_i^{-1}(a) = \frac{1}{\lambda} a$ où $\frac{1}{\lambda} > 1$ et K est stable par l'automorphisme $u_i^{-1}$
En faisant comme dans le cas précédent avec $u_i^{-1}$, on arrive à une absurdité de façon analogue.
Ainsi $\boxed{a \text{ est un point fixe de tous les endomorphismes } u_i \text{ où } i \in \{1, \dots, r\}}$

18. On note pour $u \in \mathrm{G}$, $\mathrm{F}_u = \{a \in \mathrm{K} \,/\, u(a) = a\}$.
Comme pour $u \in \mathrm{G}$, $u - \mathrm{Id_E}$ est continue (linéaire en dimension finie),
alors $\mathrm{F}_u = (u - \mathrm{Id_E})^{-1}(\{0\})$ est un fermé de K (image réciproque de fermé par une application continue)
Comme K est un fermé de E (car compact de E) et $\mathrm{F}_u \subset \mathrm{K}$, alors $\mathrm{F}_u$ est un fermé de E
*Remarque : on aurait pu aussi remarquer que* $\mathrm{F}_u = \mathrm{K} \cap \{a \in \mathrm{E} \,/\, u(a) = a\}$
On suppose par l'absurde que : $\bigcap_{u\in\mathrm{G}} \mathrm{F}_u = \emptyset$,
la question 10, nous fournit $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p \in \mathrm{G}$ tels que $\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{F}_{u_i} = \emptyset$
Ceci est contradictoire avec la question précédente ainsi $\bigcap_{u\in\mathrm{G}} \mathrm{F}_u \neq \emptyset$.
Ce qui nous fournit $a \in \bigcap_{u\in\mathrm{G}} \mathrm{F}_u$ Ainsi $\boxed{\text{il existe bien } a \in \mathrm{K} \text{ tel que pour tout } u \in \mathrm{G},\ u(a) = a}$

## E. Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

19. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$. Montrons : $\begin{cases} (a) & \rho_{\mathrm{A}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (b) & \rho_{\mathrm{A}} \text{ linéaire} \\ (c) & \rho_{\mathrm{A}} \text{ bijective} \end{cases}$

**Pour (a)** C'est évident

**Pour (b)** On vérifie par calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que :

$$\forall \mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \rho_{\mathrm{A}}(\lambda \mathrm{M} + \mathrm{N}) = \lambda \rho_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) + \rho_{\mathrm{A}}(\mathrm{N})$$

**Pour (c)** Soit $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{G}$.

Par calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a vérifie facilement que $\rho_{\mathrm{B}} \circ \rho_{\mathrm{C}} = \rho_{\mathrm{CB}}$ car $\mathrm{B}^{\mathsf{T}}\mathrm{C}^{\mathsf{T}} = (\mathrm{CB})^{\mathsf{T}}$

On a également $\rho_{\mathrm{I}_n} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et l'existence $\mathrm{A}^{-1}$ car $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

donc $\rho_{\mathrm{A}} \circ \rho_{\mathrm{A}^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\rho_{\mathrm{A}^{-1}} \circ \rho_{\mathrm{A}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Ce qui prouve que $\rho_{\mathrm{A}}$ est bijective

On a montré que $\boxed{\rho_{\mathrm{A}} \in \mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))}$

Montrons maintenant que l'application notée $\Lambda : \mathrm{A} \in \mathrm{G} \longmapsto \rho_{\mathrm{A}} \in \mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ est continue.

On se donne $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n^2}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $\psi$ qui à $f = (f_1, \cdots, f_{n^2}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{(n^2)}$ associe l'application $\psi(f) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n^2]\!],\ \psi(f)(e_i) = f_i$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel donc linéaire entre espaces de mêmes dimensions finies ($n^4$).

Ainsi l'application $\psi$ est continue.

L'énoncé donne que à $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$ fixé, l'application : $\mathrm{A} \in \mathrm{G} \longmapsto \rho_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est continue.

Donc l'application noté $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathrm{A} \in \mathrm{G} \longmapsto (\rho_{\mathrm{A}}(e_1), \cdots, \rho_{\mathrm{A}}(e_{n^2})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{(n^2)}$ est continue

Ainsi $\Lambda = \psi \circ \varphi_{\mathcal{B}}$ est continue par composition.

Comme $\mathrm{H} = \Lambda(\mathrm{G})$, alors H est un compact en tant qu'image d'un compact par une application continue.

Pour établir que H est sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$, il suffit d'établir que : $\begin{cases} (i) & \mathrm{H} \subset \mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))\ \textit{(déjà vu)} \\ (ii) & \mathrm{H} \neq \emptyset \\ (iii) & \text{Les stabilités de H} \end{cases}$

**Pour** *(ii)* On a $\mathrm{I}_n \in \mathrm{G}$ car G sous-groupe.

Donc $\rho_{\mathrm{I}_n} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathrm{H}$ ainsi H est non-vide

**Pour** *(iii)* Soit $\rho_{\mathrm{A}}, \rho_{\mathrm{B}} \in \mathrm{H}$ où $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{G}$.

On a vu en (c) que $(\rho_{\mathrm{A}})^{-1} \circ \rho_{\mathrm{B}} = \rho_{\mathrm{BA}^{-1}}$

Comme G est un sous-groupe alors $\mathrm{BA}^{-1} \in \mathrm{G}$ et donc $(\rho_{\mathrm{A}})^{-1} \circ \rho_{\mathrm{B}} \in \mathrm{H}$.

On a bien montré que $\boxed{\text{H est un sous-groupe compact de } \mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))}$

Remarque : *On aurait pu montrer que pour loi de composition interne* $\perp$ *définie sur* G *par :* $\mathrm{A} \perp \mathrm{B} = \mathrm{BA}$ *que* $(\mathrm{G}, \perp)$ *est un groupe, que* $\Lambda$ *est un morphisme de groupes de* $(\mathrm{G}, \perp)$ *dans* $(\mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})), \circ)$ *et que* $\mathrm{H} = \mathrm{Im}\ (\Lambda)$ *et ainsi que* H *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$

20. On a $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc en utilisant la réciproque de 2, on a $\Delta \subseteq \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

L'application notée $\Phi : \mathrm{A} \in \mathrm{G} \longmapsto \rho_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}_n) = \mathrm{A}^{\mathsf{T}}\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue d'après l'énoncé

ainsi $\Delta = \Phi(\mathrm{G})$ est compact car G l'est.

d'où $\boxed{\Delta \text{ est un compact contenu dans } \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

Il suffit d'établir que : $\begin{cases} (i) & \mathrm{K} = \mathrm{Conv}(\Delta) \text{ est compact (oui avec 4.)} \\ (ii) & \mathrm{H} \subseteq \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ (iii) & \text{K stable par les éléments H} \end{cases}$

**Pour** $(ii)$ **:** D'après 3, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui de plus contient $\Delta$
Comme K est le plus petit convexe contenant $\Delta$ alors $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.
*Remarque : le plus petit convexe contenant une partie est bien défini car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et que l'intersection d'une famille de convexes est convexe.*

**Pour** $(iii)$ **:** Soit $M \in K$ et $\rho_A \in H$ où $A \in G$. Montrons $\rho_A(M) \in K$.
D'après ce qui est admis en introduction, on peut écrire $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i B_i$
où $(B_1, \ldots, B_{n^2+1}) \in \Delta^{n^2+1}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^2+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n^2+1}$ et $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i = 1$
Par linéarité de $\rho_A$ : $\rho_A(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i)$
Pour $1 \leqslant i \leqslant n^2+1$, on peut écrire $B_i = (C_i)^T C_i$ où $C_i \in G$, ainsi $\rho_A(B_i) = A^T (C_i)^T C_i A = (C_i A)^T C_i A$
or $C_i A \in G$ car G est un groupe et donc $\rho_A(B_i) \in \Delta$
d'où $\rho_A(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i) \in \mathrm{Conv}(\Delta) = K$.

On a montré que $\boxed{\text{K est un sous-ensemble compact de } S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ qui est stable par tous les éléments de H}}$

21. Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Markov-Kakutani au convexe compact K de l'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est stable par tous élément du sous groupe compact H de $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, il suffit d'établir que K est non vide. C'est bien la cas car comme $I_n \in G$, on a $\{I_n{}^T I_n\} \subset \Delta \subset K$.
Le théorème nous fournit alors $a \in K$, tel que $\forall u \in H,\ u(a) = a$
ou encore : $\boxed{\text{il existe } M \in K \text{ tel que pour tout } A \in G,\ \rho_A(M) = M}$
Comme $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$, 2 nous fournit $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = N^T N$.
Soit $A \in G$. On a alors $A^T N^T N A = N^T N$ car $\rho_A(M) = M$.
Alors on a $\left(NAN^{-1}\right)^T NAN^{-1} = \left(N^{-1}\right)^T A^T N^T NAN^{-1} = \left(N^T\right)^{-1} N^T NN^{-1} = I_n$
On en déduit $\boxed{\text{l'existence de } N \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que pour tout } A \in G,\ NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})}$
Considérons l'application $\psi_N : A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto NAN^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$
On vérifie que $\psi_N$ est un morphisme de groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ vers lui-même.
On note $G_1 = \psi_N(G)$ qui est donc un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ car G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$
Comme $\psi_N(G) \subset O_n(\mathbb{R})$ alors $G_1$ est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$. On remarque de plus que $\psi_N$ est bijectif de bijection réciproque $\psi_{N^{-1}} : A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto N^{-1}AN \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $G = \psi_{N^{-1}}(G_1)$.
Finalement $\boxed{\text{il existe un sous-groupe } G_1 \text{ de } O_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } G = N^{-1}G_1N = \{N^{-1}BN/\ B \in G_1\}}$

22. $\underline{g \circ \sigma_P \circ g^{-1} \text{ est une symétrie}}$ car $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $g^2 = \mathrm{Id}_E$ car $\sigma_P$ est une symétrie
On note A la matrice de $\sigma_P$ dans la base canonique qui est orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle et donc $A \in O_n(\mathbb{R}) \subset K$ Ainsi $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ admet comme matrice dans cette base $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\underline{\text{c'est un endomorphisme orthogonal}}$ de $\mathbb{R}^n$ d'où $\underline{g \circ \sigma_P \circ g^{-1} \text{ est une symétrie orthogonale}}$. De plus $\forall x \in E$, $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \sigma_P\left(g^{-1}(x)\right) = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g^{-1}(x) \in P \Leftrightarrow x \in g(P)$. On en déduit que $\boxed{g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}}$.
Soit $x \perp y$ dans E. Si $x \neq 0$. Alors $y \in Q = \{x\}^\perp$, hyperplan de E et $g \circ \sigma_Q \circ g^{-1} = \sigma_{g(Q)}$
alors $\sigma_{g(Q)}(g(x)) = g \circ \sigma_Q(x) = -g(x)$ donc $g(x) \in g(Q)^\perp$ or $g(y) \in g(Q)$ donc $g(x) \perp g(y)$ (vrai pour $x = 0$)
Ainsi $g$ conserve l'orthogonalité et 5 nous fournit $k > 0$ tel que $N = k\Omega$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ car $N \in GL_n(\mathbb{R})$
donc $\Omega$ est tel que $\Omega K \Omega^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. 21 nous fournit $G_1$ sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $K = \Omega^{-1} G_1 \Omega \subset O_n(\mathbb{R})$
on en déduit $\boxed{K = O_n(\mathbb{R})}$