Ce sujet est composé d'exercices indépendants.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$.

Q 1. Déterminer l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \sum_{n \geqslant 1} f_n(x) \text{ converge}\}$. Pour $x \in D$, on pose alors $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Q 2. Montrer que f est continue sur D.

Q 3. Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et exprimer $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ comme la somme d'une série.

Q 4. Montrer que f est de classe C^1 sur D et préciser sa monotonie sur D.

Q 5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Q 6. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}$.

Q 7. Montrer que pour tout $x \in D$, $\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Q 8. Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Q 9. Pour quelles valeurs de α réel la fonction $x \mapsto f(x^\alpha)$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Q 1. Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale avec des coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant du haut vers le bas.

Q 2. Donner le polynôme minimal de A.

Q 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

Q 4. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de $(-2)^n$.

Q 5. Justifier que A est inversible. On pose $B = A^{-1}$. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, quelles sont ses valeurs propres ?

Q 6. Montrer que la suite de matrices (B^n) converge vers une matrice Q qui vérifie $Q^2 = Q$ (il est inutile de calculer explicitement Q dans cette question).

Q 7. Calculer $Q = \lim_{n \to +\infty} B^n$.

Exercice 3

On note $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-colonnes à 3 coefficients réels. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour $(X, Y) \in E^2$, on pose $\phi(X, Y) = X^\top AY$ et $\mu(X) = \sqrt{X^\top AX}$.

Q 1. Montrer que A est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

Q 2. Montrer que A est une matrice symétrique définie-positive.

Q 3. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E (et donc μ est la norme euclidienne associée).

Q 4. On pose F le plan d'équation $x + y + z = 0$ dans la base canonique de E et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer la projection ϕ-orthogonale de V sur F (Attention : la notion d'orthogonalité est ici relative au produit scalaire ϕ !).

Q 5. Déterminer la distance de V à F pour la norme μ.

Exercice 4

n désigne un entier au moins égal à 2. Soit A une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = A^\top A$.

Q 1. Montrer que B est une matrice symétrique définie-positive.

Q 2. Montrer qu'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients positifs telles que $B = PD^2P^{-1}$. On pose $S = PDP^{-1}$.

Q 3. Montrer que S est une matrice symétrique définie-positive.

Q 4. On pose $V = SA^{-1}$. Montrer que V est une matrice orthogonale et en déduire l'existence d'une matrice U orthogonale telle que $A = US$.

Dans la suite, on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle M, \rangle = \mathrm{tr}(M^\top N)$ et on note $\|M\|$ la norme euclidienne associée. L'objectif est de déterminer la distance de A à $O_n(\mathbb{R})$.

Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $d(M) = \inf\limits_{W \in O_n(\mathbb{R})} \|M - W\|$ (distance de M à l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$).

Q 5. Montrer que pour tout $(M, W) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$, $\|M\| = \|WM\| = \|MW\|$.

Q 6. Montrer que pour tout $W \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A - W\| = \|S - U^{-1}W\| = \|D - P^{-1}U^{-1}WP\|$.

Q 7. Montrer que l'application $W \mapsto P^{-1}U^{-1}WP$ est une bijection de $O_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

En déduire que $d(A) = d(D)$.

Q 8. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients de la diagonale de D.

Montrer que pour tout $W \in O_n(\mathbb{R})$, $\|D - W\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\,\mathrm{tr}(DW) + n$.

Q 9. Montrer que pour tout $W \in O_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(DW) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$. En déduire que $d(D) = \|D - I_n\|$.

Q 10. Exprimer $d(A)$ à l'aide des valeurs propres de B.

Devoir surveillé 5 - sujet CCINP - E3A - Corrigé

Exercice

Q 1. Pour $x \leqslant 0$, la suite $(e^{-x\sqrt{n}})$ ne converge par vers 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Pour $x > 0$, par comparaison asymptotique classique, $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

Donc $D =]0, +\infty[$.

Q 2. Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|e^{-x\sqrt{n}}| \leqslant e^{-a\sqrt{n}} = f_n(a)$ et la série $\sum f_n(a)$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$. Or toutes les fonctions f_n sont continues sur $[a, +\infty[$, donc d'après le th. de continuité sour le signe $\sum$, f est continue sur $[a, +\infty[$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc f est continue sur $D = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\sqrt{n} > 0$, la fonction $f_n : x \mapsto e^{-\sqrt{n}x}$ est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\int_1^{+\infty} |f_n| = \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-\sqrt{n}x}}{-\sqrt{n}}\right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \leqslant f_n(1)$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_1^{+\infty} |f_n|$ converge.

Donc d'après le th d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Q 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $f_n' : x \mapsto -\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}x}$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n'(x)| \leqslant \sqrt{n}e^{-a\sqrt{n}}$ et comme $\sqrt{n}e^{-a\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum \sqrt{n}e^{-a\sqrt{n}}$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$. Donc d'après le th. de dérivation sour le signe $\sum$, f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc f est de classe C^1 sur $D = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}x} < 0$, donc f est strictement décroissante sur D.

Q 5. On a montré la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[42, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc d'après le th de la double limite, f a pour limite $0 = \sum_{n=1}^{+\infty} 0$ en $+\infty$.

Q 6. Pour tout $x > 0$, $f(x) = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$ donc $\frac{f(x)}{e^{-x}} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-(\sqrt{n}-1)x}$.

Or pour tout $n \geqslant 2$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-(\sqrt{n}-1)x} = 0$, car $\sqrt{n} - 1 > 0$. Et pour tout $x \geqslant 42$, $|e^{-(\sqrt{n}-1)x}| \leqslant e^{-(\sqrt{n}-1)42}$, or la série $\sum_{n\geqslant 2} e^{-(\sqrt{n}-1)42}$ est convergente (même comparaison que précédemment), donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} (x \mapsto e^{-(\sqrt{n}-1)x})$ converge normalement, donc uniformément, sur $[42, +\infty[$.

Donc d'après le th. de la double limite, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^{-x}} = 1$, *i.e.* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.

Q 7. Soit $x > 0$. La fonction $g : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est continue, positive et décroissante donc la série $\sum_{n\geqslant 1} g(n) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, donc toutes les deux convergentes.

De plus, pour tout $k \geqslant 1$, $\int_k^{k+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} g(t)\,\mathrm{d}t$ donc par relation de Chasles, en additionnant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 8. Par changement de variable $t = u^2$ ($u \mapsto u^2$ est C^1 et bijective de $[0, +\infty[$ dans lui-même),

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-xu}u\,\mathrm{d}u,$$

puis par intégration par parties (licite car les deux intégrales convergent),

$$2\int_0^{+\infty} e^{-xu}u\,\mathrm{d}u = \left[2\frac{e^{-xu}}{-x}u\right]_{u=0}^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xu}}{x}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{x^2}.$$

Et de même, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\frac{e^{-x}}{x} + 2\frac{e^{-x}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

Donc par encadrement, $\displaystyle f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

Q 9. On pose $h : x \mapsto f(x^\alpha)$, qui est continue sur $]0, +\infty[$. Le cas $\alpha = 0$ est simple : h est constante non nulle donc n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

On étudie ensuite le cas où $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$ donc $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc h est intégrale sur $]0, 1]$ (fausse singularité) ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ donc $\displaystyle h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x^{2\alpha}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc h n'est pas intégrale sur $[1, +\infty[$.

On suppose désormais $\alpha > 0$. Alors $f(x^\alpha) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x^\alpha}$ et $\displaystyle e^{-x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc h est intégrable sur $[1, +\infty[$. Et $\displaystyle f(x^\alpha) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^{2\alpha}}$ donc h est intégrable sur $]0, 1]$ si et s.si $2\alpha < 1$.

Conclusion : h est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et s.si $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Exercice

Q 1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^3 + 3X^2 - 4 = (X+2)^2(X-1)$, donc les valeurs propres de A sont -2 et 1.

On résout les équations $AV = V$ et $AV = -2V$ où $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$AV = V \iff \begin{cases} x &= 2z \\ y &= 6z \end{cases}$ donc $\mathrm{sep}(A, 1)$ est la droite vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$AV = -2V \iff x - y + z = 0$ donc $\mathrm{sep}(A, -2)$ est le plan vectoriel dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La somme des dimensions des deux sous-espaces propres vaut $1 + 2 = 3$ donc A est diagonalisable. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(-2, -2, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a l'égalité $D = P^{-1}AP$.

Q 2. A est diagonalisable donc son polynôme minimal μ_A est scindé à racines simples. Or ses racines sont les valeurs propres de A donc $\mu_A = (X-1)(X+2) = X^2 + X - 2$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^n par μ_A : il existe un polynôme R et deux constantes $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^n = R\mu_A + a_nX + b_n$.

En évaluant en A, on trouve $A^n = a_nA + b_nI_3$.

Q 4. μ_A a pour racines 1 et -2, alors en évaluant l'égalité polynômiale précédente, on obtient $\begin{cases} a_n + b_n = & 1 \\ -2a_n + b_n = & (-2)^n \end{cases}$, donc $a_n = \dfrac{1 - (-2)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2 + (-2)^n}{3}$.

Q 5. 0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

Comme $A = PDP^{-1}$, alors $B = PD^{-1}P^{-1}$ où $D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1)$, donc B est diagonalisable et ses valeurs propres sont les inverses de celles de A : 1 et $-1/2$.

Q 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = P(D^{-1})^n P^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} Q = P\operatorname{diag}(0,0,1)P^{-1}$: la matrice Q est donc une matrice de projecteur donc elle vérifie $Q^2 = Q$.

Q 7. On calcule P^{-1} : $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Puis $Q = P\operatorname{diag}(0,0,1)P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice

Q 1. A est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le th. spectral. On remarque que $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1 donc 1 est valeur propre d'ordre 2 de A. Et comme A est diagonalisable, la somme de ses valeurs propres vaut $\operatorname{tr}(A) = 6$, donc la dernière valeur propre est 4 d'ordre 1.

Q 2. A est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives donc elle est définie-positive.

Q 3. Par bilinéarité du produit matriciel, il est clair que ϕ est bilinéaire. Et comme A est symétrique, ϕ est une forme symétrique.

De plus, d'après la question précédente, pour tout $X \in E - \{0\}$, $\phi(X,X) = X^\top AX > 0$ donc ϕ est définie-positive. Au total, ϕ est un produit scalaire.

Q 4. Le plan F a pour base la famille (V_1, V_2) telle que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On orthogonalise cette base par l'algorithme de Gram-Schmidt :

on pose $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2 + \lambda V_1$ où λ est choisi tel que $\phi(W_1, W_2) = 0$, *i.e.* $\lambda = -\dfrac{\phi(V_1,V_2)}{\phi(V_1,V_1)}$. Or $\phi(V_1,V_1) = 4$ et $\phi(V_1,V_2) = -1$, donc $W_2 = V_2 - \dfrac{1}{4}V_1 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 5/4 \\ -1 \end{pmatrix}$,

puis on pose $X_1 = \dfrac{1}{\mu(V_1)}V_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \dfrac{1}{\mu(W_2)}W_2 = \dfrac{4}{\sqrt{122}}\begin{pmatrix} -1/4 \\ 5/4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{122} \\ 5/\sqrt{122} \\ -4/\sqrt{122} \end{pmatrix}$: la famille (X_1, X_2) est une base orthonormée de F.

Enfin, la projection ϕ-orthogonale de V sur F est $\phi(V,X_1)X_1 + \phi(V,X_2)X_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{14} + \frac{3}{122} \\ \frac{1}{4} - \frac{15}{122} \\ 0 + \frac{12}{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-55}{244} \\ \frac{31}{244} \\ \frac{24}{244} \end{pmatrix}$.

Q 5. $d(V,F)^2 = \mu(V)^2 - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{122}\right) = 14 - \dfrac{79}{244}$ donc $d(V,F) = \sqrt{\dfrac{3337}{244}}$.

Exercice

Q 1. B est symétrique car $B^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = B$.

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top BX = X^\top A^\top AX = (AX)^\top AX = \|AX\|^2$ donc si $X \neq 0$, alors comme A est inversible, $AX \neq 0$ donc $\|AX\| > 0$, donc $X^\top BX > 0$: la matrice B est donc symétrique définie-positive.

Q 2. D'après le th. spectral, B est orthodiagonalisable et d'après la question précédente, ses valeurs propres sont strictement positives, donc il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients positifs telles que $B = PD^2P^{-1}$.

Q 3. Comme P est orthogonale, $P^{-1} = P^\top$ donc S est symétrique et ses valeurs propres sont les racines carrées de celles de B donc sont aussi strictement positives. Donc S est une matrice symétrique définie-positive.

Q 4. $VV^\top = SA^{-1}(A^{-1})^\top S^\top = SA^{-1}(A^\top)^{-1}S^\top = S(A^\top A)^{-1}S^\top = SB^{-1}S$

$= PDP^{-1}.PD^{-2}P^{-1}.PDP^{-1} = P(D.D^{-2}.D)P^{-1} = I_n$ donc V est une matrice orthogonale.

On pose alors $U = AS^{-1}$: U est l'inverse de V donc est aussi une matrice orthogonale, car l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication. Donc on a bien montré que $A = US$ où U est orthogonale et S symétrique définie-positive.

Q 5. Soit $(M,W) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$. Alors $\|WM\|^2 = \operatorname{tr}((WM)^\top WM) = \operatorname{tr}(M^\top W^\top WM)$, or $W^\top W = I_n$, donc $\|WM\|^2 = \operatorname{tr}(M^\top M) = \|M\|^2$.

De même, $\|MW\| = \mathrm{tr}((MW)^\top MW) = \mathrm{tr}(W^\top M^\top MW) = \mathrm{tr}(M^\top MWW^\top)$, or $WW^\top = I_n$, donc $\|MW\|^2 = \mathrm{tr}(M^\top M) = \|M\|^2$.

Q 6. $\|A - W\| = \|US - W\| = \|U^{-1}(US - W)\|$ d'après **Q 5** car $U^{-1} = U^\top \in O_n(\mathbb{R})$. Donc $\|A - W\| = \|S - U^{-1}W\|$.

Or $S = PDP^\top$, donc comme P et $P^\top$ sont orthogonales, on a de même $\|S - U^{-1}W\| = \|PDP^\top - U^{-1}W\| = \|DP^\top - P^{-1}U^{-1}W\| = \|D - P^{-1}U^{-1}WP\|$.

Q 7. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication, pour tout $W \in {}_n(\mathbb{R})$, le produit $P^{-1}U^{-1}WP$ appartient aussi à $O_n(\mathbb{R})$ puisque chacun des facteurs est dans $O_n(\mathbb{R})$.

L'application $W \mapsto P^{-1}U^{-1}WP$ est donc une application de $O_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, et on vérifie aisément que l'application $W \mapsto UPWP^{-1}$ est sa réciproque :

$P^{-1}U^{-1}(UPWP^{-1})P = P^{-1}(U^{-1}U)PW(P^{-1}P) = P^{-1}PW = W$

et $UP(P^{-1}U^{-1}WP)P^{-1} = U(PP^{-1})U^{-1}W(PP^{-1}) = UU^{-1}W = W$.

Conclusion : $d(A) = \inf\limits_{W \in O_n(\mathbb{R})} \|A - W\| = \inf\limits_{W \in O_n(\mathbb{R})} \|D - P^{-1}U^{-1}WP\| = \inf\limits_{W' \in O_n(\mathbb{R})} \|D - W'\| = d(D)$.

Q 8. Soit $W \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\|D - W\| = \sqrt{\mathrm{tr}((D-W)^\top(D-W))} = \sqrt{\mathrm{tr}((D^\top - W^\top)(D-W)}$

$$= \sqrt{\mathrm{tr}(D^\top D - D^\top W - W^\top D + W^\top W)} = \sqrt{\mathrm{tr}(D^2) - \mathrm{tr}(DW) - \mathrm{tr}(W^\top D^\top) + \mathrm{tr}(I_n)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \mathrm{tr}(DW) - \mathrm{tr}(DW) + n} \quad \text{car } \mathrm{tr}(M^\top) = \mathrm{tr}(M).$$

Q 9. Soit $W = (w_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{tr}(DW) = \sum\limits_{i=1}^n (\lambda_i w_{i,i})$.

Or comme $\sum\limits_{j=1}^n w_{i,j}^2 = 1$, on en déduit que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $w_{i,i}^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^n w_{i,j}^2 = 1$ donc que $w_{i,i} \leqslant 1$.

Donc comme les valeurs propres λ_i sont toutes positives, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i w_{i,i} \leqslant \lambda_i$, donc $\mathrm{tr}(DW) \leqslant \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i$.

Donc pour tout $W \in O_n(\mathbb{R})$, $\|D - W\|^2 = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\,\mathrm{tr}(DW) + n \geqslant \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i + n = \sum\limits_{i=1}^n (\lambda_i - 1)^2$.

Dans cette inégalité, il y a égalité dans le cas où $W = I_n$. Donc ceci prouve que $d(D) = \min\limits_{W \in O_n(\mathbb{R})} \|D - W\| = \|D - I_n\|$.

Q 10. On résume : $d(A) = d(D) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (\sqrt{\mu_i} - 1)^2}$ où $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont les carrés des valeurs propres de S, *i.e.* les valeurs propres de B.