Mpi - Programme de colles 13

Semaine du 20 au 24 janvier 2025

1 Espaces préhilbertiens

a) Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : définition, exemples fondamentaux. Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens. Norme euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwarz. Orthogonalité de vecteurs, th. de Pythagore.

b) Familles orthogonales, familles orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale sans vecteur nul. Existence de bases orthonormées d'un espace euclidien, algorithme de Gram-Schmidt d'orthogonalisation/orthonormalisation d'une base. Intérêt des bases orthonormées pour la simplicité des calculs.

c) Sous-espaces orthogonaux. Des sous-espaces orthogonaux deux à deux sont en somme directe. Orthogonal d'un sous-espace, orthogonal d'un vecteur.

d) Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires. Projection orthogonale d'un vecteur sur un tel sous-espace (calcul effectif), projecteur orthogonal, propriétés remarquables des projecteurs orthogonaux.

e) Distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie, calcul effectif.

2 Espaces euclidiens

a) Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien par un produit scalaire.

b) Adjoint d'un endomorphisme, définition, unicité, matrice dans une base orthonormée. Propriétés usuelles, dont stabilité par l'adjoint de l'orthogonal d'un s.e.v. stable.

c) Orientation d'un $\mathbb{R}$-e.v. (présentation succinte).

d) Isométries vectorielles ou automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien : définition (conservation de la norme), diverses caractérisations (conservation du produit scalaire, transformation d'une base orthonormée en base orthonormée, l'adjoint est l'inverse). Groupe orthogonal.

e) Matrices orthogonales, lien avec les isométries vectorielles. Déterminant d'une matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal. Changements de bases orthonormées. Produit mixte en dimension quelconque, produit vectoriel en dimension 3.

f) Étude en dimension 2, détermination des isométries vectorielles.

g) Réduction des isométries vectorielles. Définition de matrices orthosemblables.

h) Étude en dimension 3. En fonction de la dimension du sous-espace des vecteurs invariants, nature des isométries vectorielles : réflexions, rotations (et antirotations : hors-programme). Détermination de l'axe orienté et de l'angle associé dans le cas d'une rotation. Caractérisation des rotations par le déterminant.

i) Endomorphismes auto-adjoints, lien avec les matrices symétriques. Stabilité du supplémentaire orthogonal d'un s.e.v. stable par un endomorphisme symétrique, orthogonalité deux à deux des sous-espaces propres. Matrices orthodiagonalisables, matrices orthosemblables. Théorème spectral. Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis-positifs, caractérisation par le spectre.

Démonstrations à connaître :

— distance d'un vecteur à un s.e.v.
— diverses caractérisations des isométries vectorielles
— caractérisation des endomorphismes auto-adjoint positifs ou défini-positifs par le spectre