La fonction exponentielle a été définie antérieurement comme l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ prenant la valeur 1 en 0. Mais il n'a jamais été prouvé qu'une telle solution existait bien.

L'objet du devoir est de démontrer l'existence de cette fonction exponentielle : pour cela, on s'interdit donc d'utiliser cette fonction (sinon on tourne en rond!), ainsi que la fonction logarithme (elle-même définie comme réciproque de l'exponentielle). On ne veut donc utiliser que des moyens élémentaires.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $e_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Question préliminaire Montrez que pour tout $\alpha \in [0, 1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1-\alpha)^n \geqslant 1 - n\alpha$.

Partie 1

Dans cette partie, on suppose que $x \in \mathbb{R}_+$.

Question 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. En utilisant la question préliminaire avec $\alpha = \dfrac{x/n}{n-1+x}$, montrez que $e_n(x) \geqslant e_{n-1}(x)$.

Quelle propriété de la suite $(e_n(x))$ a-t-on prouvé ?

Question 2) On choisit un entier naturel $k > x$.

a) En utilisant la question préliminaire, montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 - \dfrac{x}{kn+x}\right)^n \geqslant 1 - \dfrac{x}{k}$.

b) Montrez alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_{kn}(x) \leqslant \left(\dfrac{k}{k-x}\right)^k$.

c) Déduisez-en que la suite $(e_n(x))_{n\geqslant 1}$ est majorée.

Question 3) Justifiez que la suite $(e_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge. On note $e(x)$ sa limite. Justifiez que $e(x) \geqslant 1$.

Partie 2

Dans cette partie, on suppose que $x \in \mathbb{R}_-^*$.

Question 1) Justifiez l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{x^2}{n^2} \in [0, 1[$.

Question 2) Montrez que pour tout $n \geqslant N$, $1 - \dfrac{x^2}{n} \leqslant e_n(-x) \times e_n(x) \leqslant 1$.

Question 3) Montrez que la suite $(e_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge. En notant de même $e(x)$ sa limite, donnez une relation entre $e(x)$ et $e(-x)$.

Partie 3

Question 1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrez que $e_n(x+y) \leqslant e_n(x) \times e_n(y) \leqslant e_{2n}(x+y)$.

b) Déduisez-en une relation entre $e(x) \times e(y)$ et $e(x+y)$.

Question 2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_-^2$. Montrez que la relation précédente est encore vraie.

Question 3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$. En distinguant les cas $x + y \geqslant 0$ et $x + y < 0$, montrez que la relation précédente est encore vraie.

Question 4) Concluez : quelle propriété de la fonction e a-t-on prouvé ?

Partie 4

Question 1)

a) Montrez que pour tout $x \in \,]0, 1[$, $1 + x \leqslant e(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

b) Déduisez que e est dérivable en 0 à droite et précisez $e'_d(0)$.

Question 2) Montrez que e est dérivable en 0 et précisez $e'(0)$.

Question 3) Montrez que e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$.

Devoir non surveillé 7 - Corrigé

Question préliminaire Soit $\alpha \in [0,1[$ et $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $(1-\alpha)^n \geqslant 1 - n\alpha$ ».

$\mathscr{P}(1)$ est vraie, puisque c'est l'égalité $(1-\alpha)^1 = 1-\alpha = 1 - 1\times\alpha$.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $(1-\alpha)^n \geqslant 1 - n\alpha$, or $1-\alpha$ est un nombre positif et on sait qu'on peut multiplier une inégalité par un réel positif sans en changer le sens, donc on obtient $(1-\alpha)^{n+1} \geqslant (1-n\alpha)(1-\alpha)$, ce qui donne après développement du membre de droite $(1-\alpha)^{n+1} \geqslant 1-(n+1)\alpha + n\alpha^2$. Or $n\alpha^2 \geqslant 0$ donc finalement $(1-\alpha)^{n+1} \geqslant 1-(n+1)\alpha$, autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'aprés le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Partie 1

Question 1) On utilise l'indication de l'énoncé, on a donc $\left(1 - \dfrac{x/n}{n-1+x}\right)^n \geqslant 1 - \dfrac{x}{n-1+x}$ (remarque : on peut utiliser l'inégalité démontrée dans la question préliminaire, car le nombre α choisi ici appartient bien à $[0,1[$, puisque x et $n-1$ sont positifs).

Comme on veut faire apparaître $e_{n-1}(x)$, on divise numérateur et dénominateur de chacune des sous-fractions contenant $n-1$ par $n-1$, justement, pour faire apparaître $1+\dfrac{x}{n-1}$: $\left(1 - \dfrac{\frac{x}{n(n-1)}}{1+\frac{x}{n-1}}\right)^n \geqslant 1 - \dfrac{\frac{x}{n-1}}{1+\frac{x}{n-1}}$

Puis en mettant au même dénominateur, $\left(\dfrac{1+\frac{x}{n-1} - \frac{x}{n(n-1)}}{1+\frac{x}{n-1}}\right)^n \geqslant \dfrac{1+\frac{x}{n-1} - \frac{x}{n-1}}{1+\frac{x}{n-1}}$

ce qui donne $\left(\dfrac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n-1}}\right)^n \geqslant \dfrac{1}{1+\frac{x}{n-1}}$, ce qui est intéressant, car on voit apparaître $1+\dfrac{x}{n}$

donc $\dfrac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^n} \geqslant \dfrac{1}{1+\frac{x}{n-1}}$, puis $\dfrac{e_n(x)}{e_{n-1}(x)\times\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \geqslant \dfrac{1}{1+\frac{x}{n-1}}$

pour finir, on multiplie par $1+\dfrac{x}{n-1}$, qui est positif, et on obtient $\dfrac{e_n(x)}{e_{n-1}(x)} \geqslant 1$, c'est-à-dire $e_n(x) \geqslant e_{n-1}(x)$, ce qu'on voulait.

Ceci étant vraie pour tout $n \geqslant 2$, on a donc montré que la suite $(e_n(x))$ est croissante (remarque : il est sous-entendu dans tout le corrigé que la suite est définie à partir du rang 1).

Question 2)

a) En utilisant l'indication de l'énoncé, on obtient $\left(1-\dfrac{x}{kn+x}\right)^n \geqslant 1 - n\dfrac{x}{kn+x}$ (en posant $\alpha = \dfrac{x}{kn+x}$ qui appartient bien à $[0,1[$).
Il reste simplement à montrer que $1 - \dfrac{nx}{kn+x} \geqslant 1 - \dfrac{x}{k}$: on forme la différence et on détermine son signe. $1 - \dfrac{nx}{kn+x} - \left(1-\dfrac{x}{k}\right) = \dfrac{x^2}{k(kn+x)}$ est bien un nombre positif, donc on a ce qu'on voulait.

b) On reprend l'inégalité précédente : comme la fonction $t \mapsto t^k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $\left(1-\dfrac{x}{kn+x}\right)^{kn} \geqslant \left(1-\dfrac{x}{k}\right)^k$, donc $\left(\dfrac{kn}{kn+x}\right)^{kn} \geqslant \left(\dfrac{k-x}{k}\right)^k$, donc $\left(\dfrac{1}{1+\frac{x}{kn}}\right)^{kn} \geqslant \left(\dfrac{k-x}{k}\right)^k$.
On a donc montré $\dfrac{1}{e_{kn}(x)} \geqslant \left(\dfrac{k-x}{k}\right)^k$, donc en prenant l'inverse, on obtient $e_{kn}(x) \leqslant \left(\dfrac{k}{k-x}\right)^k$.

c) On a montré dans la question 1 que la suite $(e_n(x))$ est croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $n \leqslant kn$, on a $e_n(x) \leqslant e_{kn}(x) \leqslant \left(\dfrac{k}{k-x}\right)^k$, ce qui prouve que la suite $(e_n(x))$ est majorée par $\left(\dfrac{k}{k-x}\right)^k$.

Question 3) On a montré que la suite $(e_n(x))$ est croissante et majorée, donc d'aprés le th. de la limite monotone, elle converge. Comme tous ses termes sont supérieurs ou égaux à 1, sa limite l'est aussi.

Partie 2

Question 1) La suite $\left(\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ converge vers 0, donc par définition, à partir d'un certain rang, ses termes sont dans l'intervalle ouvert $]-1,+1[$, mais comme elle est positive, ils sont donc dans $[0,1[$.

Question 2) Pour tout $n \geqslant N$, $e_n(-x) \times e_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n$

On utilise la question préliminaire avec $\alpha = \dfrac{x^2}{n^2}$ (on peut puisque d'aprés la question précédente, $\dfrac{x^2}{n^2}$ appartient bien à $[0,1[$), on obtient $\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1 - n\dfrac{x^2}{n^2} = 1 - \dfrac{x^2}{n}$, ce qu'on voulait.

Quant à l'autre inégalité, elle est évidente, puisque $0 \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{n^2} \leqslant 1$.

Question 3) Pour tout $n \geqslant N$, comme $e_n(-x) > 0$, on en déduit que $\dfrac{1-\frac{x^2}{n}}{e_n(-x)} \leqslant e_n(x) \leqslant \dfrac{1}{e_n(-x)}$.

La suite $(e_n(-x))$ converge vers $e(-x)$ qui est non nul (partie 1, question 3, car $-x > 0$). Donc d'après les th. d'opérations sur les suites convergentes, les suites $\left(\dfrac{1-\frac{x^2}{n}}{e_n(-x)}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{e_n(-x)}\right)$ convergent vers la même limite $\dfrac{1}{e(-x)}$. Donc d'après le th. d'encadrement, la suite $(e_n(x))$ converge vers $\dfrac{1}{e(-x)}$. En notant $e(x)$ sa limite, on a donc $e(x) = \dfrac{1}{e(-x)}$, ou encore $e(x) \times e(-x) = 1$.

Partie 3

Question 1)

a) D'une part, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{y}{n}\right) = 1 + \dfrac{x+y}{n} + \dfrac{xy}{n^2} \geqslant 1 + \dfrac{x+y}{n}$ puisque $\dfrac{xy}{n^2} \geqslant 0$. Donc comme la fonction puissance n-ème est croissante, on en déduit que $e_n(x+y) \leqslant e_n(x) \times e_n(y)$.
D'autre part, $\left(1+\dfrac{x+y}{2n}\right)^2 - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1+\dfrac{y}{n}\right) = \dfrac{(x+y)^2}{4n^2} - \dfrac{xy}{n^2} = \dfrac{(x+y)^2-4xy}{4n^2} = \dfrac{(x-y)^2}{4n^2} \geqslant 0$, donc $\left(1+\dfrac{x+y}{2n}\right)^2 \geqslant \left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1+\dfrac{y}{n}\right)$, donc de même, en mettant tout ça à la puissance n, on obtient $e_{2n}(x+y) \geqslant e_n(x) \times e_n(y)$.
Au total, on a ce qu'on voulait.

b) La suite $(e_n(x+y))$ converge vers $e(x+y)$ donc la suite $(e_{2n}(x+y))$, qui est une suite extraite, converge aussi vers $e(x+y)$.
D'après le th. d'encadrement, la suite $(e_n(x) \times e_n(y))$ converge donc vers $e(x+y)$. Or elle converge aussi vers $e(x) \times e(y)$ d'après les th. d'opérations sur les suites convergentes. Par unicité de la limite, on en déduit que $e(x+y) = e(x) \times e(y)$.

Question 2) D'après la partie 2, $e(x) = \dfrac{1}{e(-x)}$, $e(y) = \dfrac{1}{e(-y)}$ et $e(x+y) = \dfrac{1}{e(-x-y)}$.

Comme $-x, -y$ et $-x-y$ sont positifs, on peut appliquer ce qui précède : $e(-x-y) = e(-x)e(-y)$. Donc $e(x+y) = \dfrac{1}{e(-x)e(-y)} = \dfrac{1}{e(-x)} \times \dfrac{1}{e(-y)} = e(x)e(y)$.

Question 3) Si $x+y \geqslant 0$, alors comme x et $-y$ sont aussi positifs, on peut appliquer ce qu'on a montré dans la question 1 : $e(x) = e\big(x+y+(-y)\big) = e(x+y)e(-y)$. Donc en multipliant par $e(y)$, on a $e(x)e(y) = e(x+y)e(-y)e(y) = e(x+y)$.

Si maintenant $x+y < 0$, alors on a cette fois-ci $x, -y$ et $-x-y$ positifs, donc $e(-y) = e\big((-x-y)+x\big) = e(-x-y)e(x)$ donc en multipliant par $e(y)e(x+y)$, on a $e(x+y) = e(x)e(y)$.

Question 4) On a donc montré que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad e(x+y) = e(x)e(y)$$

Partie 4

Question 1)

a) On a montré que pour $x \geqslant 0$, la suite $(e_n(x))$ est croissante, donc sa limite est au moins égale à son premier terme : $e(x) \geqslant e_1(x) = 1 + x$.
Pour l'autre inégalité $e(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$, c'est directement la question 2 de la partie 1 en choisissant $k = 1$.

b) Pour tout $x \in]0,1[$, $1+x \leqslant e(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ donc $x \leqslant e(x)-1 \leqslant \dfrac{1}{1-x}-1 = \dfrac{x}{1-x}$, donc en divisant par $x>0$, on a $1 \leqslant \dfrac{e(x)-1}{x} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

Puis on applique le th. d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0_+} 1 = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1}{1-x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{e(x)-1}{x} = 1$.

Enfin note que $\dfrac{e(x)-1}{x} = \dfrac{e(x)-e(0)}{x-0}$, donc la valeur de la limite précédente montre que e est dérivable en 0 à droite et $e'_d(0)=1$.

Question 2) Pour $x<0$, $\dfrac{e(x)-1}{x} = \dfrac{e(-x)-1}{-x} \times \dfrac{1}{e(-x)}$ et on conclut par composition des limites et th. d'opérations sur les limites que $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{e(x)-1}{x} = 1$, donc que e est dérivable en 0 à gauche et que $e'_g(0)=1$.

Comme les deux dérivées à gauche et à droite sont égales, on en déduit que e est dérivable en 0 et que $e'(0)=1$.

Question 3) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e(x+y)=e(x)e(y)$ donc $\dfrac{e(x+y)-e(y)}{x} = e(y)\dfrac{e(x)-1}{x}$ donc comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e(x)-1}{x} = 1$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e(x+y)-e(y)}{x} = e(y)$, ce qui signifie que e est dérivable en y et que $e'(y)=e(y)$.

Finalement, e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $e'=e$.

Conclusion : comme $e(0)=1$, la fonction e ainsi construite est la fonction exponentielle définie au Lycée....