CENTRALE Maths 2 PC 2024

Eléments de correction

Q 1. Par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est clair.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'inégalité vérifiée au rang n pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$.
Soit $x_1, \cdots, x_{n+1}$, n+1 réels.

récurrence pas tout à fait évidente

$$\begin{aligned}
\left|\left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k)\right)-1\right| &= \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1+x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right| \\
&\leqslant \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right|+\left|x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right| \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1+|x_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) \quad \text{hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant (1+|x_{n+1}|)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1 \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+|x_k|)\right)-1
\end{aligned}$$

Q 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$ par une simple étude de la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ ou par convexité de exp (courbe située au dessus de la tangente en 0) ou par croissance de l'intégrale :

inégalité $1 + x \leqslant e^x$ à connaître

- pour $x \geqslant 0$, $e^x - 1 = \displaystyle\int_0^x e^t dt \geqslant \int_0^x 1 = x$
- pour $x \leqslant 0$, $e^x - 1 = -\displaystyle\int_x^0 e^t dt \geqslant -\int_x^0 1 dt = x$.

Par conséquent, comme $1 + x_k \geqslant 0$ pour $x_k \in [-1, +\infty[$, on peut multiplier les inégalités $(1 + x_k) \leqslant e^{x_k}$ de $k = 1$ à n :

attention pour multiplier des inégalités, il faut bien vérifier que les facteurs sont positifs

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

Q 3. Soit $t \in \mathbb{C}$, par développement en série entière de l'exponentielle puis inégalité triangulaire puis $k! \geqslant (k-2)!$:

il fallait utiliser le DSE de exp et $k! \geqslant (k-2)!$

$$|(1+t)-e^t| = \left|-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k!} \leqslant |t|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^{k-2}}{(k-2)!} = |t|^2 e^{|t|}$$

Q 4. On a par l'inégalité triangulaire :

formule $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

$$|a^n - b^n| = \left|(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}\right| \leqslant |a-b|\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{|a^k|}_{\leqslant M^k}\underbrace{|b|^{n-1-k}}_{M^{n-1-k}} \leqslant nM^{n-1}|a-b|$$

Q 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M = \max\left\{\left|1+\frac{z}{n}\right|, \left|e^{\frac{z}{n}}\right|\right\}$. D'après les questions précédentes :

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(e^{\frac{z}{n}}\right)^n\right| \leqslant nM^{n-1}\left|1+\frac{z}{n}-e^{\frac{z}{n}}\right| \leqslant nM^{n-1}\left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\frac{|z|}{n}}$$

De plus, on a $\left|1+\frac{z}{n}\right| \leqslant 1 + \frac{|z|}{n} \leqslant e^{\frac{|z|}{n}}$ et $\left|e^{\frac{z}{n}}\right| \leqslant e^{\frac{|z|}{n}}$ (obtenu par inégalité triangulaire et DSE de exp) donc

$$M \leqslant e^{\frac{|z|}{n}}$$

et par conséquent,

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leqslant nM^{n-1}\left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\frac{|z|}{n}} \leqslant \frac{|z|^2}{n}e^{\frac{(n-1)|z|}{n}}e^{\frac{|z|}{n}} = \frac{|z|^2}{n}e^{|z|}$$

Q 6. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant |u_n - e^z| \leqslant \frac{|z|^2}{n} e^{|z|} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^2}{n} e^{|z|} = 0$$

donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - e^z| = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = e^z$$

Q 7. Pour $N \geqslant 2$,

$$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N} \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \frac{\prod_{n=2}^{N}(n-1)}{\prod_{n=2}^{N} n} \frac{\prod_{n=2}^{N}(n+1)}{\prod_{n=2}^{N} n} = \frac{1}{N} \frac{N+1}{2}$$

Donc

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{2N} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Et pour $N \geqslant 2$, en séparant le produit pour $n = 2k$ (alors $n + (-1)^{n+1} = 2k - 1$) et $n = 2k - 1$ (alors $n + (-1)^{n+1} = 2k$) :

$$\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{(2N)!} \prod_{n=2}^{2N} \left(n + (-1)^{n+1}\right) = \frac{1}{(2N)!} \prod_{k=1}^{N} (2k-1) \prod_{k=2}^{N} (2k) = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Q 8. Question ultra classique, on obtient $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ par une IPP. Je laisse cela au lecteur pour l'instant.

L'expression de W_{2n+1} s'obtient alors par récurrence (pour l'init, $W_1 = 1$)

Q 9. On utilise la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{et} \qquad (2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2n)} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$$

D'où

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{(2n)} \frac{2\pi n (n/e)^{2n}}{2\sqrt{\pi n}(2n/e)^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Puis, pour $n \geqslant 1$,

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{4k^2 - 1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)} = 4^n (n!)^2 \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)(2k)}{(2n)!(2n+1)!} = (2n+1)W_{2n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Q 10. Pour tout $N \geqslant n$, d'après Q2 (sachant que $-\mathbb{P}(A_p) \geqslant -1$) :

$$0 \leqslant \prod_{p=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_p)) \leqslant \exp\left(\sum_{p=n}^{N} -\mathbb{P}(A_p)\right)$$

Or la série $\sum \mathbb{P}(A_p)$ étant divergente et à termes positifs, on en déduit $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=p}^{N} \mathbb{P}(A_p) = +\infty$ et par conséquent,

$$\lim_{N\to+\infty} \exp\left(\sum_{p=n}^{N} -\mathbb{P}(A_p)\right) = 0$$

On conclut avec le théorème d'encadrement que $\displaystyle\prod_{p=n}^{+\infty}(1-\mathbb{P}(A_p)) = 0$.

Q 11. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_n = \displaystyle\bigcup_{p\geqslant n} A_p$ est décroissante pour l'inclusion donc par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right)$$

Et par continuité décroissante appliquée à la suite $(C_q)_{q\geqslant n}$ où $C_q = \displaystyle\bigcap_{p=n}^{q} \overline{A_p}$, décroissante pour l'inclusion :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right) = \lim_{q\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=n}^{q} \overline{A_p}\right) \underset{\text{indep.}}{=} \lim_{q\to+\infty} \prod_{p=n}^{q} \mathbb{P}\left(\overline{A_p}\right) = \prod_{p=n}^{+\infty}(1-\mathbb{P}(A_p)) \underset{\text{Q10}}{=} 0$$

D'où :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right)\right) = 1$$

Q 12. Soit $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} - Q_n &= \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|)\right)(1+|f_{n+1}(x)|-1) \\
&\underset{\text{Q2}}{\leqslant} \exp\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\right)|f_{n+1}(x)| \\
&\leqslant \exp\left(R_0(x)\right)|f_{n+1}(x)| \quad \text{car} \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}|f_k(x)| = R_0(x)
\end{aligned}$$

Et par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, sachant que $|f_n|$ est continue et $\sum|f_n|$ converge uniformément sur S, on en déduit que R_0 est continue sur le segment S donc R_0 est bornée.

Par conséquent, il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in S$, $R_0(x) \leqslant M$ d'où :

$$Q_{n+1} - Q_n \leqslant e^{R_0(x)}|f_{n+1}(x)| \leqslant e^{M}|f_{n+1}(x)|$$

Q 13. On a

$$\begin{aligned}
|P_{n+1}(x) - P_n(x)| &= |1+f_{n+1}(x)-1|\left|\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)\right| \\
&\leqslant |f_{n+1}(x)|\prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|) \\
&\leqslant (1+|f_{n+1}(x)|-1)\,Q_n(x) \\
&\leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x)
\end{aligned}$$

Q 14. Commençons par la convergence simple. Soit $x \in S$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

il faut penser à la démonstration liant série télescopique et suite associée

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(P_{k+1}(x) - P_k(x)) + P_1(x)$$

Et la série $\sum_{k\geqslant 1} P_{k+1}(x)+P_k(x)$ est absolument convergente (donc convergente) car $|P_{k+1}(x)-P_(x)| \leqslant e^M|f_{k+1}(x)|$ et la série $\sum_{k\geqslant 1}|f_{k+1}(x)|$ est convergente car la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1}|f_k|$ converge uniformément. Par conséquent, la suite $(P_n(x))_{n\geqslant 1}$ est convergente et :

$$P(x)=\prod_{k=1}^{+\infty}(1+f_k(x))=\lim_{n\to+\infty}P_n(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(P_{k+1}(x)-P_k(x))+P_1(x)$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in S$, en utilisant le télescopage :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(P_{k+1}(x)-P_k(x))=\lim_{N\to+\infty}P_N(x)-P_n(x)=P(x)-P_n(x):$$

l'égalité clé de cette question est $\sum_{k=n}^{+\infty}(P_{k+1}(x)-P_k(x))=P(x)-P_n(x)$

$$|P_n(x)-P(x)|=\left|-\sum_{k=n}^{+\infty}(P_{k+1}(x)-P_k(x))\right|\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}|P_{k+1}(x)-P_k(x)|\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}e^M|f_{k+1}(x)|=e^MR_n(x)$$

En notant $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|$. D'où par passage à la borne supérieure :

$$\|P_n-P\|_\infty\leqslant e^M\|R_n\|_\infty$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\|R_n\|_{+\infty}=0$ car la série $\sum|f_n|$ converge uniformément d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\|P_n-P\|_\infty=0$$

Donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers P sur S.

Q 15. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, P_n est continue sur S par produit (fini) de fonctions continues (f_k continue) et la suite de fonctions $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur S donc par le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions. De plus pour tout $x\in S$ fixé,

$$\ln(P_n(x))=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+f_k(x))$$

Et la série $\sum_{k\geqslant 1}\ln(1+f_k(x))$ est convergente car :

- la série $\sum|f_k(x)|$ est convergente (par convergence simple de $\sum|f_k|$)
- donc $\lim_{k\to+\infty}f_k(x)=0$
- et $\ln(1+f_k(x))\underset{k\to+\infty}{=}o\,(f_k(x))$

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty}\ln(P_n(x))=\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(1+f_k(x))=L\in\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty}P_n(x)=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln(P_n(x))}=e^L>0\quad\text{donc}\quad P(x)>0$$

Q 16. Je pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f_n(x)=-e^{-nx^2}$. Nous allons appliquer la question précédente ; pour cela, nous devons vérifier toutes les hypothèses sur la suite (f_n).

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et $x\in[a,b]$, $f_n(x)>-1$ car $e^{-nx^2}<1$
- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur $[a,b]$ car :
  — $|f_n(x)|=e^{-nx^2}\leqslant e^{-na^2}$, d'où $\|f_n\|_\infty\leqslant e^{-na^2}$ et la série $\sum e^{-na^2}$ converge puisque $e^{-na^2}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où la convergence normale de la série $\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ sur $[a,b]$.

Par conséquent, d'après les deux questions précédentes, f est bien définie et continue sur $[a,b]$ et ceci pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q 17. Soit x,y deux réels tels que $0<x\leqslant y$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-nx^2 \geqslant -ny^2$ donc $1 - e^{-nx^2} \geqslant 1 - e^{-ny^2} \geqslant 0$, donc en multipliant ces inégalités :

$$\prod_{n=1}^{N} (1 - e^{-nx^2}) \geqslant \prod_{n=1}^{N} (1 - e^{-ny^2}) \quad \text{d'où} \quad f(x) \geqslant f(y) \text{ par passage à la limite } N \to +\infty$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Limite en 0. On applique la question Q2 :

$$\forall x > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \prod_{n=1}^{N} \left(1 - e^{-nx^2}\right) \leqslant \exp\left(\sum_{n=1}^{N} -e^{-nx^2}\right)$$

Or pour tout $x > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -e^{-nx^2} = \frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ (série géométrique de raison $e^{-x^2} \in [0, 1[$) d'où par passage à la limite quand $N \to +\infty$:

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \exp\left(\frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right)$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = -\infty$ d'où $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \exp\left(\frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) = 0$ donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Limite en $+\infty$. On applique la question Q1 puis Q2

$$\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 - e^{-kx^2})\right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} 1 + \left|-e^{-kx^2}\right|\right) - 1 \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-kx^2}\right) - 1$$

Donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx^2} = \frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$,

$$\forall x > 0 \quad |f(x) - 1| \leqslant \exp\left(\frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) - 1$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) = 1$ d'où par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - 1| = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Q 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par dérivation du produit $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + f_k(x))$,

$$\forall x \in S \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} (1 + f_\ell(x)) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \frac{P_n(x)}{1 + f_k(x)} = P_n(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}$$

Q 19. Notons pour $x \in S$, $T(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in S \quad \left|P_n'(x) - P(x)T(x)\right| &= |P_n(x)T_n(x) - P(x)T(x)| \\ &= |P_n(x)\left(T_n(x) - T(x)\right) + T(x)\left(P_n(x) - P(x)\right)| \\ &\leqslant |P_n(x)| \, |T_n(x) - T(x)| + |T(x)| \, |P_n(x) - P(x)| \end{aligned}$$

Or la suite (P_n) converge uniformément vers P donc par la suite $(\|P_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée ; il existe $M \geqslant 0$,

$\|P_n\|_\infty \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, $\frac{f_n'}{1+f_n}$ est continue et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur S, par application du théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, T est continue sur le segment S donc T est bornée. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in S \quad \left|P_n'(x) - P(x)T(x)\right| &\leqslant |P_n(x)|\,|T_n(x) - T(x)| + |T(x)|\,|P_n(x) - P(x)| \\ &\leqslant \underbrace{\|P_n\|_\infty}_{\leqslant M} \|T_n - T\|_\infty + \|T\|_\infty \|P_n - P\|_\infty\end{aligned}$$

Donc par passage à la borne supérieure,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|P_n' - PT\|_\infty \leqslant M\|T_n - T\|_\infty + \|T\|_\infty \|P_n - P\|_\infty$$

Or par convergence uniforme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{f_n'}{1+f_n}$, la suite (T_n) converge uniformément vers T : on a $\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T\|_\infty$ et d'après la question Q14, $\lim_{n\to+\infty} \|P_n - P\|_\infty = 0$.

Donc par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \|P_n' - PT\|_\infty = 0$$

Donc la suite de fonctions $(P_n')_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur S vers $x \mapsto P(x)T(x)$: pour tout $x \in S$, $\lim_{n\to+\infty} P_n'(x) = P(x)T(x)$.

On peut maintenant appliquer le théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur S ;
- la suite (P_n) converge simplement sur S vers P
- la suite (P_n') converge uniformément sur S vers $x \mapsto P(x)T(x)$

Par conséquent, $P = \lim_{n\to+\infty} P_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur S et pour tout $x \in S$, $P'(x) = P(x)T(x)$ or $P(x) \neq 0$ d'après Q15, d'où :

$$\forall x \in S, \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$$

Remarque : l'égalité ci-dessus s'obtient par un simple passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité de la question Q18.

Q 20. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}P_n(X) &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{i^k}{(2n+1)^k} X^k - \frac{(-i)^k}{(2n+1)^k} X^k \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{i^{2n+1} - (-i)^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+1}} X^{2n+1} + R(X) \right) \quad \text{avec } R \in \mathbb{R}_{2n}[X] \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}} X^{2n+1} + R(X)\end{aligned}$$

Donc P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

Q 21. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$.

$$\begin{aligned}2iP_n(x_k) &= \left(1 + \frac{ix_k}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{ix_k}{2n+1}\right)^{2n+1} \\ &= \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)^{2n+1} - \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)^{2n+1}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
2iP_n(x_k) &= \frac{1}{\cos^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\left(e^{\frac{ik\pi}{2n+1}(2n+1)} - e^{\frac{-ik\pi}{2n+1}(2n+1)}\right)\\
&= \frac{1}{\cos^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\left(e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}\right) = 0
\end{aligned}$$

Donc x_k est une racine de P_n pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

Mais $k \mapsto x_k$ est injective (par injectivité de la fonction tangente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$), donc l'ensemble $\{x_k, k \in [\![0, 2n]\!]\}$ contient $2n+1$ racines de P_n qui est un polynôme de degré $2n+1$; on a donc toutes les racines de P_n.

Q 22. On va regrouper les racines x_k deux à deux, en remarquant que pour $1 \leqslant k \leqslant n$:
$2n+1-k \in [\![n+1, 2n]\!]$ et :

$$x_{2n+1-k} = (2n+1)\tan\left(\frac{(2n+1)\pi - k\pi}{2n+1}\right) = (2n+1)\tan\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) = -(2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -x_k$$

D'après la question précédente, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned}
P_n(X) = \mu\prod_{k=0}^{2n}(X - x_k) &= \mu(X - x_0)\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)\prod_{k=n+1}^{2n}(X - x_k)\\
&= \mu X\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)\prod_{k=1}^{n}(X - \underbrace{x_{2n+1-k}}_{=-x_k}) \quad \text{changement d'indices}\\
&= \mu X\prod_{k=1}^{n}(X^2 - x_k^2)\\
&= \mu\prod_{k=1}^{n}(-x_k^2)X\prod_{k=1}^{n}\frac{X^2 - x_k^2}{-x_k^2}\\
&= \underbrace{\mu(-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k^2}_{=\lambda}X\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right)
\end{aligned}$$

Il suffit de poser $\lambda = \mu(-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k^2$ pour obtenir l'égalité demandée.

Q 23. En reprenant la définition de P_n, sachant que $P_n'(0)$ est le coefficient en X dans $P_n(X)$, on a :

$$P_n'(0) = \frac{1}{2i}\binom{2n+1}{1}\frac{i^1 - (-i)^1}{2n+1} = 1$$

De plus en dérivant P_n avec l'expression de la question Q22, en notant $Q_n(X) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right)$:

$$P_n'(X) = \lambda\left(XQ_n'(X) + Q_n(X)\right) \quad \text{d'où} \quad P_n'(0) = \lambda Q_n(0) = \lambda$$

Donc $\lambda = P_n'(0) = 1$ d'où le résultat.

Q 24. Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'après la question Q6, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{ix}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{-ix}$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}P_n(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin(x)$$

Donc la suite de fonctions polynomiales (P_n) converge simplement vers sin sur $\mathbb{R}$.

Q 25. Soit $t \in \mathbb{R}$, et k un entier $\geqslant 2$.

Je note $x_j(t) = (2\lfloor t\rfloor + 1)\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor + 1}\right)$.

- Cas 1 : $t < k-1$. Alors $v_k(t) = v_{k-1}(t) = P_{\lfloor t\rfloor}(x)$. L'inégalité est claire.
- Cas 2 : $k-1 \leqslant t < k$. Alors $\lfloor t\rfloor = k-1$ et $x_j(t) = x_j(k-1)$. Donc :
$v_k(t) = P_{\lfloor t\rfloor}(x) = P_{k-1}(x) = x\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \dfrac{x^2}{[x_j(k-1)]^2}\right)$ (d'après Q23)
et $v_{k-1}(t) = x\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \dfrac{x^2}{x_j(t)^2}\right) = v_k(t)$. L'inégalité demandée est alors évidente.
- Cas 3 : $t \geqslant k$. Alors $v_k(t) = v_{k-1}(t)\left(1 - \dfrac{x^2}{x_k(t)^2}\right) = x\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \dfrac{x^2}{x_j(t)^2}\right)$.

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| = |v_{k-1}(t)|\left|\left(1 - \frac{x^2}{x_k(t)^2}\right) - 1\right| = |v_{k-1}(t)|\frac{x^2}{x_k(t)^2}$$

Or pour tout $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan u \geqslant u$ (inégalité des accroissements finis à partir de l'inégalité $\tan'(u) = 1 + \tan^2(u) \geqslant 1$), d'où $x_k(t) \geqslant k\pi$. Par conséquent,

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| = |v_{k-1}(t)|\frac{x^2}{x_k(t)^2} \leqslant |v_{k-1}(t)|\frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

Q 26. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Premier cas : $t \geqslant k$. On applique l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de la question 2 :

$$|v_k(t)| = |x|\prod_{j=1}^{k}\left|1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right| \leqslant |x|\prod_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right) \leqslant |x|\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^2}{x_j(t)^2}\right)$$

Or $x_j(t)^2 \geqslant (j\pi)^2$ (cf question précédente) et par croissance de la fonction exp :

$$|v_k(t)| \leqslant |x|\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^2}{x_j(t)^2}\right) \leqslant |x|\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

Deuxième cas : $t < k$. On utilise le premier cas pour obtenir la première inégalité, puis la croissance de exp :

$$|v_k(t)| = P_{\lfloor t\rfloor}(x) = x\prod_{j=1}^{\lfloor t\rfloor}\left(1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right) \underset{\text{cas 1}}{\leqslant} |x|\exp\left(\sum_{j=1}^{\lfloor t\rfloor}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) \leqslant |x|\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

Q 27. On met bout à bout les inégalités des deux questions précédentes,

$$\begin{aligned}\forall k \geqslant 2, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |v_k(t) - v_{k-1}(t)| &\leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2}|v_{k-1}(t)| \\ &\leqslant \frac{|x|^3}{k^2\pi^2}\exp\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) \\ &\leqslant \frac{|x|^3}{k^2\pi^2}\exp\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)\end{aligned}$$

D'où par passage à la borne supérieure,

$$\forall k \geqslant 2, \quad \|v_k - v_{k-1}\|_\infty \leqslant \frac{|x|^3}{k^2\pi^2}\exp\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Donc la série $\sum_{k\geqslant 2}\|v_k - v_{k-1}\|_\infty$ est convergente, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 2}(v_k - v_{k-1})$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Q 28. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor + 1}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor + 1} \quad \text{donc} \quad \lim_{t\to+\infty}\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor + 1}\right)(2\lfloor t\rfloor + 1) = j\pi$$

D'où par produit fini de limites finies :

$$\lim_{t\to+\infty} v_k(t) = \lim_{t\to+\infty} x\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)(2\lfloor t\rfloor+1)\right)^2}\right) = x\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

Soit $t\in\mathbb{R}_+$. Pour tout entier $k>t$, $v_k(t)=P_{\lfloor t\rfloor}(x)$ donc

$$\lim_{k\to+\infty} v_k(t) = P_{\lfloor t\rfloor}(x)$$

Q 29. Je note pour $t\in\mathbb{R}_+$:

on va calculer $\lim_{t\to+\infty} V(t)$ de deux manières différentes

$$V(t)=\sum_{k=2}^{+\infty}(v_k(t)-v_{k-1}(t)) = \lim_{k\to+\infty} v_k(t)-v_1(t) \underset{\text{Q28}}{=} P_{\lfloor t\rfloor}(x)-v_1(t)$$

D'après la question Q24, $\lim_{t\to+\infty} P_{\lfloor t\rfloor}(x)=\sin(x)$ et $\lim_{t\to+\infty} v_1(t)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)$ donc :

$$\lim_{t\to+\infty} V(t)=\sin(x)-x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)$$

Calculons maintenant $\lim_{t\to+\infty} V(t)$ à l'aide du théorème de la double limite :

les deux questions précédentes me font penser à appliquer le théorème de la double limite à la série de fonctions $\sum(v_k-v_{k-1})$

- pour chaque $k\geqslant 2$, d'après la question précédente :

$$\lim_{t\to+\infty} v_k(t)-v_{k-1}(t) = x\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)-x\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

- la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 2}(v_k-v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et $+\infty$ est une borne de $\mathbb{R}_+$.

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} V(t) = \lim_{t\to+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} v_k(t)-v_{k-1}(t) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}(v_k(t)-v_{k-1}(t))\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} x\left(\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)-\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)\right)\\ &= x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)-x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right) \quad \text{par télescopage}\end{aligned}$$

D'où

$$\sin(x)-x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)=\lim_{t\to+\infty} V(t) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)-x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)$$

D'où

$$\sin(x)=x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

Q 30. On va appliquer le résultat de la question 19 avec $S=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f_n(x)=-\frac{x^2}{(n\pi)^2}$.
Commençons par vérifier que (f_n) vérifie bien les hypothèses de la question 19 :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in S$, on a $\frac{x^2}{\pi^2}\leqslant\frac{1}{4}$ donc $f_n(x)\geqslant\frac{-1}{4n^2}>-1$.
- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur S car :
  $\|f_n\|_\infty\leqslant\frac{1}{4n^2}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\|f_n\|_\infty$ converge ce qui signifie que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge normalement donc uniformément sur S.

- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur S car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in S, \quad \left|\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}\right| = \left|\frac{-2x}{(n\pi)^2-1}\right| \leqslant \frac{\pi}{(n\pi)^2-1}$$

Donc par passage à la borne supérieure sur S :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|\frac{f_n'}{1+f_n}\right\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{(n\pi)^2-1} \quad \text{d'où} \quad \left\|\frac{f_n'}{1+f_n}\right\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence normale sur S (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f_n'}{1+f_n}$.

On peut donc maintenant appliquer le résultat de la question 19 avec pour $x \in S\backslash\{0\}$:
$P(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$, , et donc $P'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)} \quad \text{soit} \quad \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2x}{(n\pi)^2-x^2}$$

On en déduit :

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2x}{(j\pi)^2-x^2}$$

Q 31. On utilise l'indication. On a $x^2\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et

$$x\cos(x)-\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) - x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{-x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)} = -\frac{1}{3}$$

De plus pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\}$, en utilisant la question précédente :

$$\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)} = \frac{1}{x}\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = -\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2}{(j\pi)^2-x^2}$$

Mais la série de fonctions $\sum_{j\geqslant 1} g_j$ où $g_j(x) = \frac{-2}{(j\pi)^2-x^2}$ converge uniformément sur S car $\|g_j\|_\infty \leqslant \frac{2}{(j\pi)^2-\frac{\pi^2}{4}}$ d'où la convergence normale de la série $\sum_{j\geqslant 1} g_j$ et donc par le théorème de la double limite (on aurait pu utiliser le théorème de continuité) :

$$\lim_{x\to 0} -\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2}{(j\pi)^2-x^2} = \sum_{j=1}^{+\infty}\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(j\pi)^2-x^2} = \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{-2}{(j\pi)^2}$$

D'où

$$-\frac{1}{3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)} = \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{-2}{(j\pi)^2} \quad \text{i.e.} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Q 32. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres. On note pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. exemple de cours

- pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t) = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ par continuité de exp.
- pour tout $x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$, pour tout $t > 0$,

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \left|\begin{array}{ll} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{array}\right.$$

et φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, car φ continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et :

— en 0 : $\varphi(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$ et $1-a<1$ et $t\mapsto \frac{1}{t^{1-a}}$ intégrable sur $]0,1]$ (Riemann).

— en $+\infty$: $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée et $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$.

Par conséquence, Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

Q 33. On raisonne par récurrence sur n :

initialisation : $n=1$, pour tout $x>0$,

$$g_1(x)=\int_0^1 u^{x-1}(1-u)\mathrm{d}u=\left[\frac{u^x}{x}-\frac{u^{x+1}}{x+1}\right]_0^1=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}.$$

hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons pour tout $x>0$, $g_n(x)=\dfrac{n!}{\prod_{k=0}^n(x+k)}$.

On effectue une intégration par parties (que je ne rédige pas) :

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(x)=\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}\mathrm{d}u &= \frac{n+1}{x}\int_0^1 u^x(1-u)^n\mathrm{d}u \quad \text{(IPP)}\\
&=\frac{n+1}{x}g_n(x+1)\\
&=\frac{n+1}{x}\frac{n!}{\prod_{k=0}^n(x+1+k)} \quad \text{hyp. de récurrence avec } x+1\\
&=\frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1}(x+k)}
\end{aligned}$$

Q 34. Soit $x>0$. J'applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\geqslant 0,\quad f_n(x)=\left|\begin{array}{ll} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t\leqslant n\\ 0 & \text{si } t>n\end{array}\right.$$

On a :

- pour $t>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)=\lim\limits_{n\to+\infty} t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n=t^{x-1}e^{-t}$ par la question Q6 ; la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $t>0$,

$$|f_n(t)|\leqslant t^{x-1}e^{-t}\quad\begin{cases}\text{évident} & \text{si } t>n\\ \text{d'après Q2} & \text{si } t\leqslant n\end{cases}$$

Et $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$; déjà vu en Q32 mais rappelons le :
$t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$ et $t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t)=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\Gamma(x)$$

Q 35. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, par le changement de variable usuel $u=t/n$, ($u\mapsto nu$ est de classe C^1, strictement croissante, bijective de $]0,1]$ dans $]0,n]$) :

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t=\int_0^1(nu)^{x-1}(1-u)^n\,n\mathrm{d}u=n^xg_n(x)=n^x\frac{n!}{\prod_{k=0}^n(x+k)}$$

Donc par la question précédente

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}n^x\frac{n!}{\prod_{k=0}^n(x+k)}$$

Q 36. D'après Q29, $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{j^2}\right)$ et d'après Q35 :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \frac{n^{1-x} n!}{\prod_{k=0}^n (1-x+k)}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \frac{n^{1-x} n!}{\prod_{k=0}^n (1-x+k)} &= \frac{n(n!)^2}{x\prod_{k=1}^n (x+k)\prod_{k=1}^{n+1}(k-x)}\\ &= \frac{1}{x}\left(\prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(x+k)(k-x)}\right)\frac{n}{n+1-x}\\ &= \frac{n}{x(n+1-x)}\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}\\ &= \frac{n}{x(n+1-x)}\left(\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\right)^{-1}\end{aligned}$$

Or $\frac{n}{x(n+1-x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{x}\frac{\pi x}{\sin(\pi x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Q 37. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. L'égalité demandée revient à montrer que la suite (u_n) est convergente. Pour cela, il suffit de montrer que la série télescopique associée $\sum u_{n+1} - u_n$ est convergente.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{-1}{2n^2} + +o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente donc la suite (u_n) converge, d'où l'existence de γ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$ c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Q 38. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \prod_{k=1}^n k$ et $e^{\sum_{k=1}^n \frac{x}{k}} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}}$.

$$\frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \frac{e^{x\ln(n)}}{x}\prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} = \frac{e^{x\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)}}{x}\prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}$$

Et d'après la question précédente $\lim_{n\to+\infty} e^{x\left(\ln(n)-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)} = e^{-\gamma x}$ d'où par passage à la limite et Q35 :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{x\left(\ln(n)-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)}}{x}\prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{k=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}$$