Ce sujet est composé d'exercices indépendants.

Exercice 1

Soit $K > 0$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $|f'| \leqslant K$ (hypothèses H).

Q 1.

a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $|f(xt)| \leqslant K|x|t$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t} f(xt)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose désormais $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} f(xt)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q 2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 3. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale.

Q 4. Montrer que pour tout $x > 0$, $F'(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(u) e^{-u/x}\,\mathrm{d}u$.

Q 5. On suppose de plus que f' est intégrable sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que f a une limite réelle en $+\infty$, qu'on note L.

b) Montrer alors que si $L \neq 0$, alors $F'(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{L}{x}$, puis que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} L \ln x$.

Désormais, on choisit $f = \sin$: cette fonction vérifie bien les hypothèses H de l'exercice.

Q 6. Calculer explicitement $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q 7. En déduire une expression simple de $F(x)$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \mathbf{1} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Q 1. Justifiez que la matrice M est diagonalisable.

Q 2. Quel est le rang de M ? Déduisez-en que M possède une valeur propre évidente et donnez la dimension du sous-espace propre associé.

Q 3. Justifiez que M possède en plus deux autres valeurs propres éventuellement confondues, notées λ et μ.

Q 4. Calculez M^2, puis $\mathrm{tr}(M^2)$. La matrice M^2 est-elle diagonalisable ? Si oui, quelles sont ses valeurs propres en fonction de celles de M ?

Q 5. Montrez que $\lambda + \mu = n$ et $\lambda^2 + \mu^2 = (n-2)^2 + 4$. Déduisez-en les valeurs de λ et μ.

Q 6. Précisez le polynôme minimal de M.

Q 7. Dans cette question, on suppose que $n = 4$. Déterminez les dimensions des sous-espaces propres de M et donnez-en une base.

Exercice 3

Dans cet exercice, n est un entier naturel au moins égal à 2. Si $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$.

On pose $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, $\mathscr{T}_n^+$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $\mathscr{T}_n^-$ celui des matrices triangulaires inférieures.

Q 1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M(a)$ est à diagonale propre.
b) Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

Q 2. Dans cette question, on suppose $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A, puis donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que $A \in \mathscr{P}_2$.
b) Montrer que $\mathscr{P}_2 = \mathscr{T}_2^+ \cup \mathscr{T}_2^-$, puis que $\mathscr{P}_2$ est un fermé de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$ contient deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ constitués de matrices à diagonale propre. L'ensemble $\mathscr{P}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Q 4.

a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(t, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On pose $B = tA + uI_n$. Montrer que $\chi_B = t^n \chi_A\left(\dfrac{X-u}{t}\right)$.
b) Montrer que $\mathscr{P}_n$ est étoilé par rapport à I_n, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathscr{P}_n$, le segment $[AI_n]$ est inclus dans $\mathscr{P}_n$. En déduire que $\mathscr{P}_n$ est connexe par arcs.

Q 5. Montrer que l'application $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \chi_A \in \mathbb{R}_n[X]$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathscr{P}_n$ est un fermé.

Q 6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, *i.e.* telle que $A^\top = -A$, qui appartient à $\mathscr{P}_n$.

a) Quelle est la diagonale de A ? En déduire que $A^n = 0$, puis que $(A^\top A)^n = 0$.
b) Justifier que la matrice $A^\top A$ est diagonalisable, puis montrer qu'elle est nulle.
c) En déduire les matrices antisymétriques appartenant à $\mathscr{P}_n$.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q 1. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

On pose $J_n = H_n - \ln n$.

Q 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} - J_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(J_{n+1} - J_n)$ est une série à termes négatifs et convergente.

Q 3. En déduire l'existence d'un réel $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$ et justifiez l'inégalité $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

On pose $K_n = J_n - \gamma$.

Q 4. Donner un équivalent simple de $K_{n+1} - K_n$ quand $n \to +\infty$.

Q 5. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Q 6. En déduire le développement asymptotique quand $n \to +\infty$:

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Devoir surveillé 4 - sujet CCINP - E3A - Corrigé

Exercice

Q 1.

a) Inégalité des accroissements finis : pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $|f(u)-f(v)|\leqslant K|u-v|$. Donc pour $u\leftarrow xt$ et $v\leftarrow 0$, on en déduit $|f(xt)|\leqslant K|x|t$.

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, $\left|\dfrac{e^{-t}}{t}f(xt)\right|=\dfrac{e^{-t}}{t}|f(xt)|\leqslant K|x|e^{-t}$. Or la fonction $t\mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc par comparaison de fonctions positives, $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}f(xt)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q 2. On pose $g:(x,t)\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}f(xt)$ sur $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$.

La fonction g est clairement continue sur $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$, d'après les th. généraux sur les fonctions continues.

Soit $a>0$. Pour tout $(x,t)\in[-a,a]\times\,]0,+\infty[$, $|g(x,t)|\leqslant K|x|e^{-t}\leqslant Ka\,e^{-t}$ et la fonction $t\mapsto Ka\,e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc d'après le th. de continuité sous le signe $\displaystyle\int$, F est continue sur $[-a,a]$.

Comme ceci est vrai pour tout $a>0$, F est continue sur $\mathbb{R}=\displaystyle\bigcup_{a>0}[-a,a]$.

Q 3. De même, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$, d'après les th. généraux sur les fonctions de classe C^1.

Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=|e^{-t}f'(xt)|\leqslant K\,e^{-t}$ et la fonction $t\mapsto K\,e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc d'après le th. de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}f'(xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Q 4. On effectue le changement de variables $u=xt$: c'est possible car $t\mapsto xt$ est C^1, strictement monotone et bijectif de $]0,+\infty[$ dans lui-même.

Donc $F'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}f'(xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}f'(u)e^{-u/x}\,\mathrm{d}u$.

Q 5.

a) f' est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc la fonction $X\mapsto\displaystyle\int_0^X f'(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite réelle en $+\infty$, *i.e.* $f(X)-f(0)=f(X)$ a une limite L quand $X\to+\infty$.

b) Pour tout $u>0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(u)e^{-u/x}=f'(u)$

et pour tout $u>0$, $x>0$, $|f'(u)e^{-u/x}|\leqslant|f'(u)|$, or $|f'|$ est intégrable sur $]0,+\infty[$,

donc d'après le th. de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{xto+\infty}\int_0^{+\infty}f'(u)e^{-u/x}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}f'(u)\,\mathrm{d}u=L$. Comme $L\neq0$, on en déduit que $F'(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{L}{x}$ d'après **Q 4**.

De plus, comme $x\mapsto\dfrac{L}{x}$ est de signe constant et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{L}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge, alors d'après le th. sur l'intégration des relations de comparaison, $\displaystyle\int_1^x F'(t)\,\mathrm{d}t=F(x)-F(1)\underset{x\to+\infty}{\sim}\int_1^x\frac{L}{t}\,\mathrm{d}t=L\ln x$, donc $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}L\ln x$.

Q 6. $F'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ qui est la partie réelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{ixt}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ (intégrale absolument convergente).

$$\int_0^{+\infty}e^{ixt}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{(-1+ix)t)}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{e^{(-1+ix)t)}}{-1+ix}\right]_0^{+\infty}=\frac{-1}{-1+ix}=\frac{1+ix}{1+x^2},\text{ donc }F'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Q 7. On intègre l'égalité précédente : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x)-F(0)=\arctan(x)$, or $F(0)=0$, donc

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\sin(xt)\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t=\arctan(x).$$

Exercice

Q 1. M est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

Q 2. $\operatorname{rg} M = 2$, car les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires et les suivantes sont colinéaires soit à la première, soit à la seconde. Donc comme $n \geqslant 3$, 0 est valeur propre de M et $\dim \operatorname{sep}(M, 0) = n-2$ d'après le th. du rang.

Q 3. M est diagonalisable donc il existe une matrice diagonale D semblable à M, dont la diagonale comporte $n-2$ zéros et donc deux autres valeurs propres λ et μ.

Q 4. Il est facile de calculer M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & n-2 & \cdots & n-2 & 0 \\ \vdots & \vdots & n-2 & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & n-2 & 0 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{tr} M^2 = 2 \times 2 + (n-2) \times (n-2) = 4 + (n-2)^2$.

Comme M est semblable à D, il existe P inversible telle que $M = PDP^{-1}$, donc $M^2 = PD^2P^{-1}$ est semblable à une matrice diagonale, donc M^2 est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 d'ordre $n-2$ ainsi que λ^2 et μ^2.

Q 5. M est semblable à D donc $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} D$ donc $n = \lambda + \mu$. Et de même, M^2 est semblable à D^2 donc $\operatorname{tr} M^2 = \operatorname{tr} D^2 = \lambda^2 + \mu^2$.

Donc λ et μ vérifient $\begin{cases} \lambda + \mu & = & n \\ \lambda^2 + \mu^2 & = & (n-2)^2 + 4 \end{cases}$, donc $\lambda\mu = \frac{1}{2}\left((\lambda+\mu)^2 - (\lambda^2+\mu^2)\right) = 2n-4$, donc λ et μ sont racines du polynôme $X^2 - nX + (2n-4)$: les deux autres valeurs propres sont donc $n-2$ et 2.

Q 6. M est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, qui sont les valeurs propres distinctes de M :

— si $n = 4$, alors M a deux valeurs propres distinctes qui sont 0 et 2 donc $\mu_M = X(X-2) = X^2 - 2X$

— si $n \neq 4$, alors M a trois valeurs propres distinctes qui sont 0, 2 et $n-2$, donc $\mu_M = X(X-2)(X-(n-2)) = X^3 - nX^2 + (2n-4)X$.

Q 7. Comme $n = 4$, M n'a que deux valeurs propres : 0 et 2 d'ordre 2 chacune. La dimension des deux sous-espaces propres est donc 2.

Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$. On résout les équations $MV = 0$ et $MV = 2V$.

$MV = 0 \iff \begin{cases} v_1 + v_4 & = 0 \\ v_2 + v_3 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_3 & = -v_2 \\ v_4 & = -v_1 \end{cases}$. Une base de $\operatorname{sep}(M, 0)$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$MV = 2V \iff \begin{cases} v_1 + v_4 & = 2v_1 \\ v_2 + v_3 & = 2v_2 \\ v_2 + v_3 & = 2v_3 \\ v_1 + v_4 & = 2v_4 \end{cases} \iff \begin{cases} v_3 & = v_2 \\ v_4 & = v_1 \end{cases}$. Une base de $\operatorname{sep}(M, 2)$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice

Q 1.

a) Il suffit de calculer le polynôme caractéristique de $M(a)$ et de montrer qu'il vaut $(X-1)(X-2)(X-2+a)$. Pour cela, on effectue les opérations suivantes :

$$\begin{vmatrix} X-1 & 1 & -a \\ 0 & X-2 & a \\ -1 & -1 & X-2+a \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 2-X & -a \\ 0 & X-2 & a \\ -1 & 0 & X-2+a \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & X-2+a \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{=} (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & X-2+a \end{vmatrix} = (X-2)(X-1) \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & X-2+a \end{vmatrix} = (X-2)(X-1)(X-2+a)$$

b) Si $a \notin \{0, 1\}$, alors $M(a)$ a trois valeurs propres distinctes donc $M(a)$ est diagonalisable.

Si $a = 1$, alors $M(1)$ a deux valeurs propres : 2 d'ordre 1 et 1 d'ordre 2. Or $\operatorname{rg}(M(1) - I_3) = 2$ donc $\dim \operatorname{sep}(M(1), 1) = 3 - 2 = 1$, donc $M(1)$ n'est pas diagonalisable.

Si $a = 0$, alors $M(0)$ a deux valeurs propres : 2 d'ordre 2 et 1 d'ordre 1. Or $\operatorname{rg}(M(0) - 2I_3) = 1$ donc $\dim \operatorname{sep}(M(0), 1) = 3 - 1 = 2$, donc $M(2)$ est diagonalisable.

Conclusion : $M(a)$ est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

Q 2.

a) $\chi_A = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$. Si $A \in \mathscr{P}_2$, alors a et d sont racines de χ_A donc $a^2 - a(a+d) + (ad-bc) = 0$, ce qui donne $bc = 0$ et de même pour d, donc A est triangulaire.

Réciproquement, si $bc = 0$, alors $b = 0$ ou $c = 0$, donc A est triangulaire donc ses valeurs propres sont a et d, donc son polynôme caractéristique est $(X-a)(X-d)$, donc $A \in \mathscr{P}_2$.

Conclusion $A \in \mathscr{P}_2 \iff bc = 0$.

b) La réponse précédente montre que $\mathscr{P}_2 = \mathscr{T}_2^+ \cup \mathscr{T}_2^-$. $\mathscr{P}_2$ est alors la réunion de deux s.e.v. de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et ons ait d'après le cours qu'un espace vectoriel de dimension finie est fermé et que la réunion de deux fermés est un fermé, donc $\mathscr{P}_2$ est fermé.

Q 3. Toute matrice triangulaire est à diagonale propre, donc les ensembles $\mathscr{T}_n^+$ et $\mathscr{T}_n^-$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ constitués de matrices à diagonale propre.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A^\top$: d'après **Q 2**, ce sont deux matrices de $\mathscr{P}_2$, mais leur somme n'est pas dans $\mathscr{P}_2$, donc $\mathscr{P}_2$ n'est pas un espace vectoriel. Plus généralement, on définit les matrices diagonales par blocs $\operatorname{diag}(A, 0_{n-2})$ et $\operatorname{diag}(B, 0_{n-2})$, qui sont dans $\mathscr{P}_n$, mais leur somme ne l'est pas, donc $\mathscr{P}_n$ n'est pas un espace vectoriel.

Q 4.

a) Comme $t \neq 0$, $\chi_B = \det(XI_n - B) = \det((X-u)I_n - tA) = t^n \det\left(\dfrac{X-u}{t} I_n - A\right) = t^n \chi_A\left(\dfrac{X-u}{t}\right)$.

b) Soit $A \in \mathscr{P}_n$, $t \in [0,1]$: on veut montrer que $B = tA + (1-t)I_n \in \mathscr{P}_n$. Pour $t = 0$, c'est évident,car I_n est diagonale.

Pour $t \in]0,1]$, $\chi_B = t^n \chi_A\left(\dfrac{X-1+t}{t}\right)$. Or $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$ donc $\chi_B = t^n \displaystyle\prod_{i=1}^n \left(\dfrac{X-1+t}{t} - a_{ii}\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^n (X - (1 - t + ta_{ii}))$.

Or la diagonale de B contient les nombres $b_{ii} = ta_{ii} + (1-t)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. Donc on constate que $\chi_B = \displaystyle\prod_{i=1}^n (X - b_{ii})$. Donc $B \in \mathscr{P}_n$.

Ceci prouve que $\mathscr{P}_n$ est étoilé par rapport à I_n donc qu'il est connexe par arcs : pour relier deux matrices A, B de $\mathscr{P}_n$ par un chemin continu, il suffit de relier A à I_n en ligne droite puis I_n à B de même.

Q 5. L'application $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \chi_A \in \mathbb{R}_n[X]$ est une application entre deux espaces vectoriels de dimensions finies. Quand on calcule χ_A, ses coefficients $(c_i(A))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont des polynômes en les coefficients de A, donc chaque application c_i est continue. Les coordonnées de $A \mapsto \chi_A$ sont continues sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc $A \mapsto \chi_A$ est continue.

De même, l'application $A \mapsto \displaystyle\prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$ est aussi continue. Donc par opérations sur les fonctions continues, $A \mapsto \chi_A - \displaystyle\prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Or $\mathscr{P}_n$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par cette application continue, donc d'après le cours, $\mathscr{P}_n$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 6.

a) Il est bien connu que la diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle. Donc comme $A \in \mathscr{P}_n$, son polynôme caractéristique est X^n. D'après le th. de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$.

Donc $(A^\top A)^n = (-A^2)^n = (-1)^n (A^n)^2 = 0$.

b) La matrice $A^\top A$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Or la question précédente montre qu'elle a pour polynôme annulateur X^n donc ses valeurs propres qui sont racines de ce polynôme annulateur sont toutes nulles. Donc $A^\top A$ est semblable à la matrice nulle, donc elle est nulle.

c) En notant $A = (a_{ij})$, un simple calcul montre que la diagonale de $A^\top A = B$ contient les sommes $b_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{ik}^2$. Ces sommes sont donc toutes nulles, or ce sont des sommes de réels positifs, donc tous les termes sont nuls, *i.e.* $A = 0$.

Conclusion : la seule matrice à la fois antisymétrique et dans $\mathscr{P}_n$ est la matrice nulle.

Exercice

Q 1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{k}$ est positive, continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc en additionnant ces inégalités pour k variant de 2 à n, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int_2^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int_1^{n}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$1+\ln(n+1)-\ln 2\leqslant H_n\leqslant 1+\ln n$$

Comme $1+\ln n\sim 1+\ln(n+1)-\ln 2\sim\ln n$, par encadrement, on en déduit que $H_n\sim\ln n$.

Q 2. $J_{n+1}-J_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\dfrac{1}{n+1}+\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}+\left(-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2(n+1)^2}+o\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)\right)=-\dfrac{1}{2(n+1)^2}+o\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{-1}{2(n+1)^2}$

Or la série $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison de séries à termes de signe constant, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(J_{n+1}-J_n)$ converge.

De plus, d'après une célèbre inégalité $\ln(1+x)\leqslant x$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $J_{k+1}-J_k\leqslant 0$.

Q 3. D'après le cours, comme la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 1}(J_{n+1}-J_n)$ converge, la suite (J_n) converge. On note γ sa limite.

Pour $N\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{N}J_{k+1}-J_k=J_{N+1}-J_1=J_{N+1}-1\leqslant 0$ (somme de termes négatifs). Donc par passage à la limite, on obtient $\gamma-1\leqslant 0$, donc $\gamma\leqslant 1$.

Enfin, en reprenant les inégalités de la question **Q 1**, on a pour tout $k\geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k}$ donc en additionnant pour k varianr de 1 à n, on obtient $\ln(n+1)\leqslant H_n$ donc $\ln n\leqslant H_n$, donc $J_n\geqslant 0$: par passage à la limite, $\gamma\geqslant 0$.

Q 4. $K_{n+1}-K_n=J_{n+1}-J_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{-1}{2n^2}$ d'après **Q 2**.

Q 5. Encore une comparaison série-intégrale, avec une série convergente cette fois (la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$).

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k^2}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc en additionnant ces inégalités pour k variant de n à $+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_n^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{n-1}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\frac{1}{n}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{n-1}$$

donc par encadrement, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.

Q 6. $K_{n+1}-K_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{-1}{2n^2}$ et la série à termes négatifs $\sum\dfrac{-1}{2n^2}$ converge, donc d'après le th. d'addition des relations de comparaison, les séries sont convergentes et les restes partiels des séries $\sum(K_{n+1}-K_n)$ et $\sum\dfrac{-1}{2n^2}$ sont équivalents.

Donc $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(K_{k+1}-K_k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}\sim\dfrac{-1}{2n}$ d'après la question **Q 5**,

donc $\left(\lim\limits_{k\to+\infty}K_k\right)-K_n=-K_n\sim\dfrac{-1}{2n}$ *i.e.* $K_n\sim\dfrac{1}{2n}$.

Ceci justifie donc que $H_n-\ln n-\gamma=\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $H_n=\ln n+\gamma+\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.