Problème 1 - Algèbres de Lie trigonalisables (ENS Lyon 1990)

V désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ sur $\mathbb{C}$.

Une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{L}(V)$ est dite trigonalisable quand il existe une base de V dans laquelle la matrice de tous les éléments de $\mathscr{F}$ est triangulaire supérieure.

Un sous-espace W de V est dit stable par $\mathscr{F}$ quand pour tout $u \in \mathscr{F}$, W est stable par u.

Pour $(u, v) \in \mathscr{L}(V)^2$, on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

On dit qu'une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{L}(V)$ est une algèbre de Lie (d'endomorphismes) quand
- $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(V)$
- pour tout $u, v \in \mathscr{F}$, $[u, v] \in \mathscr{F}$.

La dimension d'une algèbre de Lie est sa dimension en tant qu'espace vectoriel.

Si $\mathscr{F}$ est une algèbre de Lie, on appelle idéal de $\mathscr{F}$ tout sous-espace vectoriel $\mathscr{I}$ de $\mathscr{F}$ qui vérifie la propriété suivante : pour tout $u \in \mathscr{I}$ et $v \in \mathscr{F}$, $[u, v] \in \mathscr{I}$.

Enfin, par isomorphisme entre $\mathscr{L}(V)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit les mêmes notions dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: $[A, B] = AB - BA$, ensemble trigonalisable de matrices, algèbre de Lie de matrices, idéal d'une telle algèbre, etc.

I.

Q 1. Montrer que pour qu'une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{L}(V)$ soit trigonalisable, il est nécessaire qu'il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathscr{F}$.

On suppose dans la suite de cette partie que tous les éléments de $\mathscr{F}$ commutent deux à deux, *i.e.* pour tout $(u, v) \in \mathscr{F}^2$, $u \circ v = v \circ u$.

Q 2. Soit $u \in \mathscr{F}$, λ une valeur propre de u et $V_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u associé à cette valeur propre. Montrer que $V_\lambda(u)$ est stable par $\mathscr{F}$.

Q 3. Montrer que les éléments de $\mathscr{F}$ ont un vecteur propre en commun. On pourra procéder par récurrence sur n.

Q 4. Montrer que $\mathscr{F}$ est trigonalisable. On pourra travailler avec des matrices.

II.

Q 5. Soit $\mathscr{F}$ une algèbre de Lie de dimension 2 et u, v deux éléments de $\mathscr{F}$ tels que $[u, v] \neq 0$. Montrer qu'il existe t, w non nuls dans $\mathscr{F}$ tels que $[t, w] = w$.

Q 6. Soit $\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ deux algèbres de Lie de dimension 2 dans chacune desquelles on peut trouver deux éléments u, v tels que $[u, v] \neq 0$. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels φ de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}'$ tel que pour tout $(u, v) \in \mathscr{F}^2$, $\varphi([u, v]) = [\varphi(u), \varphi(v)]$.

On dit qu'une algèbre de Lie est résoluble quand il existe une suite croissante $\{0\} = \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{F}_p = \mathscr{F}$ de sous-espaces de $\mathscr{F}$ tels que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, pour tout $(u, v) \in \mathscr{F}_k^2$, $[u, v] \in \mathscr{F}_{k-1}$.

Q 7. Montrer que toute algèbre de Lie de dimension $\leqslant 2$ est résoluble.

III.

Soit $\mathscr{F}$ une algèbre de Lie, $\mathscr{I}$ un idéal de $\mathscr{F}$ et ℓ une forme linéaire sur $\mathscr{I}$.

On note alors $W = \{x \in V \ / \ \forall v \in \mathscr{I} \quad v(x) = \ell(v)x\}$. On veut montrer que W est un sous-espace stable par $\mathscr{F}$.

Soit $u \in \mathscr{F}$ et $x \neq 0$ un élément de W. On définit par récurrence la suite (x_k) par : $x_0 = x$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = u(x_k)$.

Q 8. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathscr{I}$, $v(x_k) - \ell(v)x_k \in \text{vect}(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$.

Q 9. Soit U le sous-espace engendré par les vecteurs x_k ($k \in \mathbb{N}$). Montrer que U est stable par $\mathscr{I} \cup \{u\}$.

Q 10. Montrer que $\text{tr}([u, v]|_U) = \dim U \times \ell([u, v])$ (trace de la restriction de $[u, v]$ à U) : on pourra utiliser une base bien choisi de U.

Q 11. Montrer que W est stable par $\mathscr{F}$.

IV.

Soit $\mathscr{F}$ une algèbre de Lie résoluble.

Q 12. On note $d = \dim \mathscr{F}$. Montrer qu'il existe un idéal $\mathscr{I}$ de $\mathscr{F}$ de dimension $d-1$. Montrer que $\mathscr{I}$ est aussi une algèbre de Lie résoluble.

Q 13. Montrer que les éléments de $\mathscr{F}$ ont un vecteur propre commun.

Q 14. Montrer que $\mathscr{F}$ est trigonalisable.

Q 15. Montrer que réciproquement toute algèbre de Lie trigonalisable est résoluble.

Problème 2

I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

I. Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Q 1. Démontrer que $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrale sur I et déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.

Q 2. Montrer que F est solution de l'équation différentielle : $xF'(x) - (x - \dfrac{1}{2})F(x) = -K$.

Q 3. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Q 4. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

II. Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

Q 5. Montrer que f et g sont définies sur I. On admet que f et g sont continues sur I.

Q 6. Montrer que $f(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$ lorsque $x \to 0$.

Q 7. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Q 8. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

Q 9. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

III. Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim_{x\to 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

Q 10. Quel est l'ensemble I_a si A est fini ? Si A est infini ?

Q 11. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{card}(A(n))\mathrm{e}^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{card}(A(n))\mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

Q 12. Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.

En déduire un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitué des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

Q 13. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} v(n)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\mathrm{e}^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

Devoir surveillé 4 - sujet X-ENS - Corrigé

Problème 1

I.

Q 1. Le premier vecteur d'une base commune de trigonalisation est effectivement un vecteur propre commun à tous les éléments de F : la condition est donc bien nécessaire.

Q 2. Soit $v \in \mathscr{F}$. Soit $x \in V_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$, donc $v \circ u(x) = \lambda v(x)$, or u et v commutent donc on a $u(v(x)) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in V_\lambda(u)$.

$V_\lambda(u)$ est donc stable par tous les éléments de $\mathscr{F}$, donc stable par $\mathscr{F}$.

Q 3. Si $n = 1$, le résultat est immédiat car tout vecteur non nul est propre pour tout endomorphisme.

Si $n > 1$ et si tous les éléments de $\mathscr{F}$ sont des homothéties, le résultat est encore évident.

Sinon, on choisit $u \in \mathscr{F}$ non homothétie et λ l'une de ses valeurs propres (elle existe car nous sommes sur $\mathbb{C}$). Le sous-espace $V_\lambda(u)$ est strictement inclus dans V, donc de dimension $< n$, et il est stable par $\mathscr{F}$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes induits sur $V_\lambda(u)$ par les éléments de $\mathscr{F}$ (qui commutent bien) : ils possèdent un vecteur propre commun, ce qui donne le résultat voulu.

Q 4. On procède par récurrence sur n, matriciellement. On fixe une base $\mathscr{B}$ de V et on considère l'ensemble $\mathscr{G}$ des matrices des éléments de $\mathscr{F}$ dans cette base.

Pour $n = 1$, le résultat est évident.

Si $n > 1$, considérons le sous-ensemble $\mathscr{G}^\top$ composé des transposées des éléments de $\mathscr{G}$. On peut appliquer la question précédente aux éléments de $\mathscr{G}^\top$ car ils commutent entre eux : ils possèdent donc un vecteur propre commun, qui est un élément $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

Pour chaque $A \in \mathscr{G}$, on peut donc écrire $A^\top X = \lambda X$, *i.e.* $X^\top A = \lambda X^\top$.

On pose alors φ la forme linéaire de matrice $X^\top$ dans la base $\mathscr{B}$: pour tout $u \in \mathscr{F}$, on peut écrire $\varphi \circ u = \lambda\varphi$.

Il est alors clair que l'hyperplan $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est stable par tout $u \in \mathscr{F}$ car $\varphi(x) = 0$ implique $\varphi(u(x)) = 0$.

L'hypothèse de récurrence s'applique alors aux endomorphismes induits sur H par les éléments de $\mathscr{F}$ (qui commutent bien) : ils se trigonalisent, simultanément, dans une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H. En complétant cette base de H par un vecteur e_n, on obtient une base de V dans laquelle la matrice de chaque $u \in \mathscr{F}$ est triangulaire supérieure, ce qui achève la récurrence.

II.

Q 5. Notons d'abord que (u, v) est libre, sinon le crochet serait nul. (u, v) est donc une base de $\mathscr{F}$.

Puisque $\mathscr{F}$ est une algèbre de Lie, le crochet $[u, v]$ appartient à $\mathscr{F}$: $[u, v] = \alpha u + \beta v$. Nommons w ce crochet (non nul par hypothèse).

Quitte à échanger u et v, on peut supposer $\beta \neq 0$. On a alors $[u, w] = [u, \alpha u + \beta v] = \beta[u, v] = \beta w$ et en considérant maintenant $t = u/\beta$, on a : $[t, w] = w$.

Q 6. On choisit dans $\mathscr{F}$ un couple (t, w) tel que défini dans la question précédente : c'est bien sûr une base de $\mathscr{F}$. On fait de même dans $\mathscr{F}'$ avec un couple (t', w').

On pose alors ϕ l'application linéaire de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}'$ telle que $\phi(t) = t'$ et $\phi(w) = w'$. Comme ϕ transforme une base en une base, c'est un isomorphisme. De plus, pour tout $u, v \in \mathscr{F}$, $u = at + bw$ et $v = ct = dw$ donc $[u, v] = (ad - bc)[t, w] = (ad - bc)w$ et de même $[\phi(u), \phi(v)] = (ad - bc)[t', w'] = (ad - bc)w' = (ad - bc)\phi(w) = \phi([u, v])$.

Q 7. Si $[u, v] = 0$ pour tout u et v dans $\mathscr{F}$, c'est-à-dire si $\mathscr{F}$ est commutative, alors la suite $\{0\} \subset \mathscr{F}$ convient (notons que c'est toujours le cas si $\dim \mathscr{F} \leqslant 1$).

Sinon, on a constaté en **Q 6**, que si u_0 et v_0 dans $\mathscr{F}$ vérifient $[u_0, v_0] \neq 0$, alors pour tout u et v dans $\mathscr{F}$, $[u, v]$ est colinéaire à $w_0 = [u_0, v_0]$. La suite $\{0\} \subset \mathbb{C}w_0 \subset \mathscr{F}$ convient donc.

Conclusion : toute algèbre de Lie de dimension $\leqslant 2$ est résoluble.

III.

Q 8. Procédons par récurrence sur k :

pour $k = 0$, $v(x_0) - \ell(v)x_0$ est nul par hypothèse et appartient donc au sous-espace (réduit à 0) engendré par la famille vide.

Supposons le résultat au rang k ; on peut écrire :

$v(x_{k+1}) - \ell(v)x_{k+1} = v \circ u(x_k) - \ell(v)u(x_k) = [v,u](x_k) + u\,(v(x_k) - \ell(v)x_k)$

$= ([v,u](x_k) - \ell([u,v])x_k) + \ell([u,v])x_k + u\,(v(x_k) - \ell(v)x_k).$

Si on examine cette expression :

— Le crochet $[v,u]$ est dans $\mathscr{I}$ puisque $v \in \mathscr{I}$, donc l'hypothèse de récurrence assure : $[v,u](x_k) - \ell([u,v])x_k \in \mathrm{vect}(x_0,\ldots,x_{k-1})$;
— $\ell([u,v])x_k$ est bien sûr dans $\mathrm{vect}(x_0,\ldots,x_k)$;
— enfin, l'hypothèse de récurrence assure que $v(x_k)-\ell(v)x_k \in \mathrm{vect}(x_0,\ldots,x_{k-1})$ donc $u(v(x_k)-\ell(v)x_k) \in \mathrm{vect}(x_0,\ldots,x_k)$.

Finalement, on peut conclure : $v(x_{k+1}) - \ell(v)x_{k+1} \in \mathrm{vect}(x_0,\ldots,x_k)$, et le résultat est donc établi par récurrence.

Q 9. La stabilité par u découle de la définition même des x_k.

La stabilité par $v \in \mathscr{I}$ découle de la question précédente puisqu'on y a établi $v(x_k) \in \mathrm{vect}(x_0,\ldots,x_k)$.

Q 10. D'abord, U possède une base de la forme $(x_0,\ldots,x_{q-1})$: soit, en effet, q le plus grand entier tel que $(x_0,\ldots,x_{q-1})$ est libre (cet entier existe car V est de dimension finie) ; alors x_q est combinaison linéaire de $(x_0,\ldots,x_{q-1})$, de sorte que $\mathrm{vect}(x_0,\ldots,x_{q-1}) = U_0$ est stable par u (il contient l'image par u des vecteurs qui l'engendrent). Dès lors, cette stabilité assure que U_0 contient tous les x_k, donc contient U.

Finalement $U = U_0$ et la famille envisagée, libre et génératrice, est une base de U. Notons aussi que $\dim U = q$.

La question **Q 8** signifie que dans cette base la matrice de la restriction à U de chaque $v \in \mathscr{I}$ est triangulaire supérieure, avec tous les éléments diagonaux égaux à $\ell(v)$. Par conséquent, $\mathrm{tr}(v|_U) = q\ell(v)$.

Comme $[u,v]$ est aussi dans $\mathscr{I}$, on peut lui appliquer cette égalité : $\mathrm{tr}([u,v]|_U) = \dim U \times \ell([u,v])$.

Q 11. En fait, U étant stable par u et v, la restriction $[u,v]|_U$ est aussi le crochet $[u|_U, v|_U]$. De l'égalité habituelle $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$, on déduit que la trace d'un crochet est toujours nulle, donc $\mathrm{tr}([u,v]|_U) = 0$. La question précédente donne alors $\ell([u,v]) = 0$ ($q > 0$ car $x \neq 0$).

Ceci étant acquis, l'appartenance de x à W et de $[u,v]$ à $\mathscr{I}$ nous donne, par définition même de W : $[u,v](x) = 0$, *i.e.* $vu(x) = uv(x)$, ou encore, puisque $v(x) = \ell(v)x$: $vu(x) = \ell(v)u(x)$. Cette égalité, valable pour tout $v \in \mathscr{I}$, exprime que $u(x) \in W$, et établit donc :

W est stable par tout $u \in \mathscr{F}$.

IV.

Q 12. Dans la suite des $\mathscr{F}_i$, on peut supposer $\mathscr{F}_{p-1} \neq \mathscr{F}$. Soit alors $\mathscr{I}$ un hyperplan de $\mathscr{F}$ contenant $\mathscr{F}_{p-1}$. C'est un sous-espace de dimension $d-1$ et il vérifie bien la propriété qui en fait un idéal, puisque, contenant $\mathscr{F}_{p-1}$, il contient tous les crochets d'éléments de $\mathscr{F}$. Pour la même raison, $\mathscr{I}$ est une algèbre de Lie, et la suite $\{0\} \subset \mathscr{F}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{F}_{p-1} \subset \mathscr{I}$ montre que $\mathscr{I}$ est résoluble.

Q 13. Procédons par récurrence sur d.

Pour $d = 0$, $\mathscr{F} = \{0\}$ et le résultat est évident.

Si le résultat est acquis pour la dimension $d-1$, il s'applique à l'idéal $\mathscr{I}$ de la question précédente : il existe un vecteur $a \neq 0$ propre pour tous les éléments de $\mathscr{I}$. Pour tout $v \in \mathscr{I}$, il existe donc un complexe $\ell(v)$ tel que $v(a) = \ell(v)a$.

L'application $\ell : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ ainsi définie est une forme linéaire car composée de $v \mapsto v(a)$ et de $\lambda a \mapsto \lambda$, linéaires toutes les deux.

Si on introduit le sous-espace W associé à ℓ comme en partie III, la question **Q 11** indique que W est stable par $\mathscr{F}$. On peut alors chercher dans W un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathscr{F}$ car $W \neq \{0\}$ (il contient a) et ses vecteurs sont déjà propres pour tous les éléments de $\mathscr{I}$.

Soit $u \in \mathscr{F}$, $u \in \mathscr{I}$. L'endomorphisme induit par u sur W possède un vecteur propre b (le corps de base est $\mathbb{C}$ et $W \neq \{0\}$). On peut obtenir une base de $\mathscr{F}$ en adjoignant à u une base de $\mathscr{I}$. b est alors propre pour tous les éléments de cette base de $\mathscr{F}$, donc, par combinaison linéaire, pour tous les éléments de $\mathscr{F}$. Le résultat est donc vrai pour la dimension d.

Q 14. On procède par récurrence sur $n = \dim V$. Il suffit en réalité de reprendre le raisonnement de la question **Q 4** avec les mêmes notations.

$\mathscr{G}$ est une algèbre de Lie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (car $[A^\top, B^\top] = [v,u]^\top$), résoluble (car les $\mathscr{G}_i$ – notation évidente – fournissent une suite croissante adéquate). On lui applique le résultat de la question **Q 13** ci-dessus, ce qui fournit un vecteur propre pour $\mathscr{G}$ et donc un hyperplan H stable par $\mathscr{F}$.

On applique alors l'hypothèse de récurrence à l'ensemble des endomorphismes induits sur H par les éléments de $\mathscr{F}$ (qui est bien une algèbre de Lie résoluble, car toutes les propriétés requises se transmettent, par stabilité de H, aux endomorphismes induits).

Dès lors, on conclut comme en **Q 4** : Une algèbre de Lie résoluble est trigonalisable.

Q 15. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de trigonalisation commune pour les éléments de l'algèbre de Lie trigonalisable $\mathscr{F}$, et posons $E_r = \text{vect}(e_1, \dots, e_r)$.

Pour tout $u \in \mathscr{F}$, on a alors $u(E_r) \subset E_r$. Introduisons les sous-espaces $\mathscr{F}_k$ de $\mathscr{F}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$\mathscr{F}_k = \{u \in \mathscr{F} \ / \ \forall r \in [\![k, n]\!] \quad u(E_r) \subset E_{r-k}\}$

(matriciellement, $\mathscr{F}_k$ est formé des éléments de $\mathscr{F}$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure lorsque $k = 0$, avec, de plus, lorsque $k > 0$, la diagonale principale nulle ainsi que les $k - 1$ diagonales qui lui sont immédiatement supérieures).

Il est immédiat que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}$, que $\mathscr{F}_n = \{0\}$, $\mathscr{F}_0 = F$ et aussi que $\mathscr{F}_{k+1} \subset \mathscr{F}_k$.

On note également que le produit d'un élément de $\mathscr{F}_k$ par un élément de $\mathscr{F}_l$ est dans $\mathscr{F}_{k+l}$ (lorsque $k + l \leqslant n$, sinon il est nul).

Enfin, soit u et v dans $\mathscr{F}_k$. Vérifions que $[u, v] \in \mathscr{F}_{k+1}$:

— si $k = 0$, les matrices de $u \circ v$ et $v \circ u$ sont triangulaires supérieures, avec la même diagonale, formée des produits des éléments diagonaux de u et de v. Ainsi la matrice de $u \circ v - v \circ u$ est triangulaire supérieure et à diagonale nulle : $[u, v] \in \mathscr{F}_1$;

— si $k > 0$, $u \circ v$ et $v \circ u$ sont, comme on l'a dit plus haut, dans $\mathscr{F}_{2k}$ ou nuls, donc dans $\mathscr{F}_{k+1}$, et on a bien encore $[u, v] \in \mathscr{F}_{k+1}$.

La suite $\{0\} \subset \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$ prouve donc que toute algèbre de Lie trigonalisable est résoluble.

Problème 2

I.

Q 1. La fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur I par théorèmes généraux.

On a $\psi(u) \underset{u \to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1/2}}$, or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/2}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\dfrac{1}{2} < 1$, donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $]0, 1]$

De plus par croissance comparée $\psi(u) \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ et la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $2 > 1$, donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi $\boxed{\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \text{ est intégrale sur } I}$. En particulier, on en déduit l'existence de K.

Pour que la fonction $\Psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u + x)}$ soit définie (et continue par morceaux) sur I, il faut et il suffit que $x \geqslant 0$.

Si $x = 0$, on a $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u + x)} \underset{u \to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{3/2}}$, or $u \mapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, donc par comparaison de fonctions positives, Ψ ne l'est pas non plus.

Si $x > 0$, alors $\Psi(u) \underset{u \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x u^{1/2}}$ et $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u + x)} \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$

On peut conclure comme précédemment que $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u + x)}$ est intégrable sur I.

Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble les valeurs de } x \text{ pour lesquelles } F(x) \text{ est définie est } I =]0, +\infty[}$

Q 2. On pose $f : (x, u) \in I^2 \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u + x)}$.

(i) Soit $u \in I$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u + x)}$ est de classe C^1 sur I et admet comme dérivée $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \dfrac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u + x)^2}$

(ii) Soit $x \in I$. La fonction $u \longmapsto f(x,u) = \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue et intégrable sur I d'après la question précédente.

(iii) Soit $x \in I$. La fonction $u \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$ est continue sur I

(iv) Soit $a < b$ dans I. On a l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$$

et la fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (l'intégrabilité étant analogue aux précédentes)

D'après le th. de dérivation sous le signe $\int$, $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } F' : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u}$

Soit $x \in I$. On a $xF'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}(x+u)}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}u}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u$

donc $xF'(x) = -F(x) + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u$

On va effectuer une intégration par parties (sous réserve d'existence) avec des fonctions de classe C^1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\right]_{u=0}^{u\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}(u+x)} - \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\right)\mathrm{d}u$$

Le terme entre crochets est nul par croissance comparée, ce qui valide l'intégration par parties, ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\,\mathrm{d}u$$

On a bien le droit de couper l'intégrale en 2 car on a reconnu $F(x)$ donc $xF'(x) = -\dfrac{1}{2}F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\,\mathrm{d}u$

donc $xF'(x) - (x - \dfrac{1}{2})F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-x\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\,\mathrm{d}u$

donc $xF'(x) - (x - \dfrac{1}{2})F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-(x+u)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u$ après mise au même dénominateur

On en déduit $\boxed{\text{pour tout } x \in I,\ xF'(x) - (x - \tfrac{1}{2})F(x) = -K.}$

Q 3. La fonction G est de classe C^1 et et pour tout $x \in I$,

$G'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}F(x) - \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F(x) + \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left(xF'(x) - (x - \dfrac{1}{2})F(x)\right)$, donc $G'(x) = -K\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$.

La fonction $x \mapsto K\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$ étant continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable au voisinage de 0, alors la fonction $x \mapsto K\cdot\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 et de dérivée $x \mapsto K\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$, donc la fonction $x \mapsto G(x) + K\cdot\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ t est constante sur l'intervalle I.

Ainsi $\boxed{\text{il existe une constante réelle } C \text{ telle que pour tout } x \in I,\ G(x) = C - K\cdot\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.}$

Q 4. Soit $x > 0$. On effectue dans $G(x)$ sous forme intégrale le changement de variable $t = \dfrac{u}{x}$; $u = tx$; $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$ ((la fonction $t \mapsto \dfrac{u}{x}$ est de classe C^1, strictement croissante et bijective de I vers I) :

$G(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(tx+x)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t$

On pose $f_x : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$

(i) Les fonctions f_x sont continues sur I

(ii) La famille $(f_x)_{x>0}$ converge simplement vers f sur I quand $x \to 0$

(iii) La fonction f est continue sur I

(iv) De plus $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/2}}$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ ainsi comme en **Q 1**, f est intégrable sur I

et on a l'hypothèse de domination :

$$\forall x > 0,\ \forall t \in I,\ |f_x(t)| \leqslant f(t)$$

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t.$

On en déduit $\lim\limits_{x\to 0}G(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t.$

On effectue le changement de variables $v=\sqrt{t}$; $t=v^2$; $\mathrm{d}t=2v\,\mathrm{d}v$ (la fonction $t\mapsto\sqrt{t}$ est de classe C^1, strictement croissante et bijective de I vers I)

et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v=2\left[\arctan(v)\right]_{v=0}^{v\to+\infty}=\pi$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}G(x)=\pi.}$

De plus pour $x>0$, on a $0\leqslant G(x)=\mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t$

donc par théorème d'encadrement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0.}$

La fonction $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ étant continue et intégrable sur I, on a $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=0$, donc comme $G:x\mapsto C-K\cdot\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, on en déduit $C=\pi$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=K$, donc $0=\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=\pi-K^2$. De plus, $K\geqslant 0$ par positivité de l'intégrale donc $\boxed{K=\sqrt{\pi}.}$

II.

Q 5.
(i) Pour $n\geqslant 1$, la fonction $x\mapsto\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$ est continue sur I
(ii) Soit $a<b$ dans I. On a : $\forall x\in I,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ |\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}|\leqslant\sqrt{n}\mathrm{e}^{-na}$

or $n^2\sqrt{n}\mathrm{e}^{-na}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissance comparée donc $\sqrt{n}\mathrm{e}^{-na}\underset{n\to+\infty}{=}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\leqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge

donc par comparaison à une série à termes positifs la série $\displaystyle\sum_{n\leqslant 1}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-na}$ converge

Ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\leqslant 1}\left(x\mapsto\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\right)$ converge normalement sur tout segment de I (donc uniformément)

En particulier, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\leqslant 1}\left(x\mapsto\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\right)$ converge simplement vers g sur I

On vient de montrer que $\boxed{g \text{ est définie et continue sur } I.}$ De manière analogue $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } I.}$

Q 6. Soit $x\in I$. On pose $l:u\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}$. Cette fonction est le produit des deux fonctions positives et décroissantes sur $I:u\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $u\mapsto\mathrm{e}^{-ux}$, donc la fonction l est décroissante sur I, et comme en **Q 1**, la fonction l est continue et intégrable sur I.

Donc pour $n\geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1}l(u)\,\mathrm{d}u\leqslant l(n)\leqslant\int_{n-1}^{n}l(u)\,\mathrm{d}u$

En sommant on obtient pour $N\geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{N+1}\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}\leqslant\int_0^{N}\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$

Puis par passage à la limite quand $N\to+\infty$: $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u}$

On effectue le changement de variable $ux=t$: on obtient $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{xt}}\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{xt}}\,\mathrm{d}t,$

donc par théorème d'encadrement $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=K=\sqrt{\pi}$. On en déduit l'équivalent $\boxed{f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.}$

Q 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$

donc $\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}+n+1} \leqslant 0$

donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \leqslant 1}$ est décroissante.

En utilisant une comparaison série intégrale comme **Q 6**, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geqslant -2$.

Ainsi la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \leqslant 1}$ est minorée par -2 (et décroissante) d'où $\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \leqslant 1} \text{ converge.}}$

Q 8. Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \mathrm{e}^{-nx} \leqslant n\mathrm{e}^{-nx}$, or $n^3\mathrm{e}^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \mathrm{e}^{-nx} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n \leqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \mathrm{e}^{-nx} \text{ converge.}}$

On considère les séries de termes généraux $a_k = \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\sqrt{k}}$ et $b_k = \mathrm{e}^{-kx}$ géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x} \in]0, 1[$:

ces séries sont absolument convergentes de sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = f(x)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \frac{b_1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

On effectue le produit de Cauchy de ces séries absolument convergentes : $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\sqrt{k}} \mathrm{e}^{-(n-k)x}$.

Donc $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$. Ainsi $\boxed{h(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ pour tout } x \in I.}$

Q 9. Quand $x \to 0$, on a $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$ donc d'après **Q 8** $\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}.}$

On a $2g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) \mathrm{e}^{-nx} = h(x)$ donc $g(x) = \frac{1}{2}\left(h(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) \mathrm{e}^{-nx}\right)$.

Toute suite convergente étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right| \leqslant M$.

Ainsi $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) \mathrm{e}^{-nx}\right| \leqslant M \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{M}{\mathrm{e}^x - 1} \sim \frac{M}{x}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) \mathrm{e}^{-nx} \underset{x\to 0}{=} o(h(x))$,
donc $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}h(x)$.

Ainsi $\boxed{g(x) \text{ est équivalent à } \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} \text{ lorsque } x \to 0.}$

III.

Q 10. Si A est fini, alors $f_A : x \mapsto \sum_{n \in A} \mathrm{e}^{-nx}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ donc $\boxed{\text{si } A \text{ est fini, alors } I_A = [0, +\infty[.}$

On suppose désormais que A est infini. Ses éléments forment donc une suite strictement croissante d'entiers naturels : on la note $(\varphi(n))$. Par construction, la suite φ est strictement croissante à valeurs dans A donc telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{\varphi(n)} = 1$.

Soit $x=0$, la suite $\left(a_n \mathrm{e}^{-nx}\right)$ ne converge pas vers 0, car la suite extraite $\left(a_{\varphi(n)} \mathrm{e}^{-\varphi(n)x}\right) = (1)_{n \geqslant 0}$ ne converge par vers 0, donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ diverge grossièrement.

Si $x>0$, on a $\left|a_n \mathrm{e}^{-nx}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$, d'où la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-nx}$. Ainsi $\boxed{\text{si } A \text{ est infini, alors } I_A =]0,+\infty[.}$

Q 11. Soit $x>0$, $f_A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{e}^{-kx}$ et $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}$.

On remarque que pour $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{card}(A(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on peut donc faire le produit de Cauchy de ces deux séries absolument convergentes pour obtenir : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}(A(n)) \mathrm{e}^{-nx} = \dfrac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}.}$

Q 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A_1(n) = \{k^2 \ / \ k \in \mathbb{N}^* \,\text{et}\, k^2 \leqslant n\} = \{k^2 \ / \ k \in \mathbb{N}^* \,\text{et}\, k \leqslant \sqrt{n}\}$, donc $A_1(n) = \{k^2 \ / \ 1 \leqslant k \leqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$, de cardinal $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Soit $x>0$. À l'aide de la question précédente $\boxed{\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mathrm{e}^{-nx}.}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in [0,1]$, donc $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} \mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$,

donc $(1-\mathrm{e}^{-x})g(x) - 1 \leqslant f_{A_1}(x) \leqslant (1-\mathrm{e}^{-x})g(x)$ car $1-\mathrm{e}^{-x}>0$, or d'après **Q 9**, $(1-\mathrm{e}^{-x})g(x)$ équivaut à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ quand $x \to 0$, donc $\dfrac{2\sqrt{x} f_{A_1}(x)}{\sqrt{\pi}}$ tend vers 1 par théorème d'encadrement.

Ainsi $\boxed{f_{A_1}(x) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}}$ donc $x f_{A_1}(x) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}\pi}{2}$ donc $\boxed{A_1 \in S \text{ et } \Phi(A_1) = 0.}$

Q 13. Soit $x>0$. On note la suite (a_n) associée à l'ensemble $A = A_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v(n) = \operatorname{card}\left\{(\alpha,\beta) \in A_1^2 \ / \ \alpha+\beta = n\right\} = \operatorname{card}\left(\{(k, n-k) \ / \ k \in A_1 \text{ et } n-k \in A_1\right\}$,

donc $v(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ car $a_0 = 0$. De plus, $v(0) = 0 = \sum_{k=0}^{0} a_k a_{0-k}$.

On effectue ensuite le produit de Cauchy de la série $\sum_{k \geqslant 0} a_k \mathrm{e}^{-kx}$ absolument convergente par elle-même pour obtenir :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} v(n) \mathrm{e}^{-nx} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) \mathrm{e}^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a^{(2)}(n)$ le terme de la suite (a_n) associée à l'ensemble A_2.

On a $a^{(2)}(n) \leqslant v(n)$, ainsi $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2,}$ donc $x f_{A_2}(x) \leqslant (\sqrt{x} f_{A_1}(x))^2$ d'où $\boxed{\Phi(A_2) \leqslant \dfrac{\pi}{4}.}$