Problème 1 - inspiré de Centrale PSI 2024

Les notations H_n et J_n définies dans la partie 1 sont utilisées dans la suite du problème.

I. La constante d'Euler-Mascheroni

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q 1. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

On pose $J_n = H_n - \ln n$.

Q 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} - J_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(J_{n+1} - J_n)$ est une série à termes négatifs et convergente.

Q 3. En déduire l'existence d'un réel $\gamma = \lim_{n\to+\infty} J_n$ et justifiez l'inégalité $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

II. Une expression intégrale de γ

Q 4. Soit a, b deux réels strictement positifs. Montrer que l'intégrale $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q 5. Soit a, b deux réels strictement positifs. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ quand $x > 0$.

Montrer que g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, calculer $g'(x)$ puis en déduire une expression simple de $I(a,b)$.

Q 6. Montrer que pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}$. En déduire

$$\forall t > 0 \quad e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\right)$$

Q 7. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ est convergente et montrer que

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

III. Deux autres expressions intégrales de γ

Q 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u$, puis à l'aide de changements de variables simples, montrer que

$$\int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u = H_n$$

Q 9. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J_n = \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u$$

Q 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$.

Justifier que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[1, +\infty[$ et donner sa limite.

Q 11. Montrer que la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que $u \mapsto \dfrac{1-e^{-u}}{u}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Q 12. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u$.

Q 13. Montrer l'égalité

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Q 14. Montrer enfin

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Problème 2 - D'après Centrale MP 2019

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathscr{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{tr}(f)$, χ_f, π_f et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A - Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Q 1. Montrer que M et $M^\top$ ont même spectre.

Q 2. Montrer que $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B - Matrices compagnons

Q 3. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.

Q 4. Soit λ une valeur propre de $C_Q^\top$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C - Endomorphismes cycliques

Q 5. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.

Q 6. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Q 7. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

I.D - Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Q 8. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

Q 9. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.

Q 10. Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.

Q 11. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

II. Etude des endomorphismes cycliques

II.A - Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

Q 12. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

II.B - Dans cette sous-partie, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.

On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \ker((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

Q 13. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k,

$$\varphi_k \ : \ \begin{cases} F_k \to F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

Q 14. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

Q 15. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leqslant \dim(F_k)$?

Q 16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.

Q 17. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

Q 18. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.

Q 19. Justifier que f est cyclique.

Problème 1

I.

Q 1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{k}$ est positive, continue et décroissante sur $]0,+\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc en additionnant ces inégalités pour k variant de 2 à n, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$$

Comme $1 + \ln n \sim 1 + \ln(n+1) - \ln 2 \sim \ln n$, par encadrement, on en déduit que $H_n \sim \ln n$.

Q 2. $J_{n+1} - J_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} + \left(-\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)\right) = -\dfrac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2(n+1)^2}$

Or la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison de séries à termes de signe constant, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(J_{n+1} - J_n)$ converge.

De plus, d'après une célèbre inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J_{k+1} - J_k \leqslant 0$.

Q 3. D'après le cours, comme la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 1}(J_{n+1} - J_n)$ converge, la suite (J_n) converge. On note γ sa limite.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{N} J_{k+1} - J_k = J_{N+1} - J_1 = J_{N+1} - 1 \leqslant 0$ (somme de termes négatifs). Donc par passage à la limite, on obtient $\gamma - 1 \leqslant 0$, donc $\gamma \leqslant 1$.

Enfin, en reprenant les inégalités de la question **Q 1**, on a pour tout $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$ donc en additionnant pour k varianr de 1 à n, on obtient $\ln(n+1) \leqslant H_n$ donc $\ln n \leqslant H_n$, donc $J_n \geqslant 0$: par passage à la limite, $\gamma \geqslant 0$.

II.

Q 4. $h : t \mapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Quand $t \geqslant 1$, $|h(t)| \leqslant e^{-at} + e^{-bt}$ et $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, de même que $t \mapsto e^{-bt}$, donc par comparaison de fonctions positives, h est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Quand $t \to 0$, $h(t) \to (b-a)$ donc on a une fausse singularité en 0 : h est intégrable sur $]0,1]$.

Au total, h est intégrabke sur $]0,+\infty[$.

Q 5. On pose $h : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-xt} - e^{-bt}}{t}$ sur $]0,+\infty[^2$. Il est clair que h est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$.

Pour tout $t > 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}$.

Soit $A > 0$, alors pour tout $t > 0$ et $x \geqslant A$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-At}$ et $t \mapsto e^{-At}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le th. de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$, g est de classe C^1 sur $[A,+\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout $A > 0$, g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[= \bigcup\limits_{A>0}[A,+\infty[$. Et pour tout $x > 0$, $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{-1}{x}$.

On en déduit l'existence d'une constante C telle que pour tout $x>0$, $g(x)=-\ln x+C$. Mais comme $g(b)=0$, on a alors $C=\ln b$.

Conclusion : pour tout $x>0$, $g(x)=\ln b-\ln x$. En particulier, $I(a,b)=\ln b-\ln a=\ln\dfrac{b}{a}$.

Q 6. Soit $t>0$, alors la suite géométrique (e^{-nt}) de raison $e^{-t}\in\,]0,1[$ est convergente, donc sa série différence associée l'est aussi.

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-nt}-e^{-(n+1)t})=\frac{1}{t}(1-\lim_{n\to+\infty}e^{-(n+1)t})=\frac{1}{t}$.

Pour la même raison, la série géométrique $\sum e^{-nt}$ converge : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt}=\frac{1}{1-e^{-t}}$

donc $\displaystyle e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)t}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-(n+1)t}-\frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}\right)$

Q 7. On pose $\psi : t\mapsto e^{-t}\left(\dfrac{1}{1-e^{-t}}-\dfrac{1}{t}\right)$. De manière évidente, ψ est continue sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t>0$, $\displaystyle\psi(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\psi_n(t)$ où on a posé $\psi_n : t\mapsto e^{-(n+1)t}-\dfrac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, ψ_n est continue sur $]0,+\infty[$ et
- quand $t\to 0$, $\psi_n(t)\to 0$ en utilisant un d.l. de exp en 0 à l'ordre 1 (je ne détaille pas)
- quand $t\to+\infty$, $\psi_n(t)=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

Donc ψ_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\psi_n|=\int_0^{+\infty}\psi_n=\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+2}{n+1}$ d'après **Q 5**.

Autrement dit, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\psi_n|=J_{n+1}-J_{n+2}$ qui est le terme général d'une série convergente d'après **Q 2**.

Donc d'après le th. d'intégration terme à terme et la question **Q 3**,

$$\int_0^{+\infty}\psi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\psi_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\psi_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}(J_{n+1}-J_{n+2})=\gamma$$

III.

Q 8. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $u\mapsto\dfrac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}$ est continue sur $]0,n]$ et à l'aide du d.l. de $x\mapsto(1-x)^n$ en 0 à l'ordre 1, elle a pour limite 1 en 0. Donc elle est intégrable sur $]0,n]$.

On effectue le changement de variables $x=\dfrac{u}{n}$: $\displaystyle A=\int_0^n\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}\,\mathrm{d}ux$

puis le changement de variables $t=1-x$: $\displaystyle A=\int_1^0\frac{1-t^n}{1-t}(-\,\mathrm{d}t)=\int_0^1\frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Or pour $t\in[0,1[$, $\displaystyle\frac{1-t^n}{1-t}=\sum_{k=0}^{n-1}t^k$ donc $\displaystyle A=\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}t^k\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1t^k\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=H_n$

Q 9. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après **Q 8**, $\displaystyle J_n=H_n-\ln n=\int_0^n\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u-\int_1^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ donc

$$J_n=\int_0^1\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u+\int_1^n\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u-\int_1^n\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u-\int_0^1\frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\,\mathrm{d}u$$

Q 10. Soit $t\geqslant 1$. IL existe un entier n_0 (dépendant de u) tel que $n_0\geqslant t$, donc pour tout $n\geqslant n_0$, $f_n(t)=\dfrac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}$.

Or $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n=e^{n\ln(1-\frac{t}{n})}\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-t}$ donc $f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{e^{-t}}{t}$.

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $[1,+\infty[$ vers $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$.

Q 11. On pose $\alpha : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$: α est continue sur $[1, +\infty[$ et $0 \leqslant \alpha(u) \leqslant e^{-u}$, donc comme $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison de fonctions positives, α l'est aussi.

On pose $\beta : u \mapsto \dfrac{1 - e^{-u}}{u}$: β est continue sur $]0, 1]$ et a une limite finie en 0, donc elle est intégrable sur $]0, 1]$.

Q 12. Par définition de f_n, on remarque que $\displaystyle\int_1^n \frac{\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} \, du = \int_1^{+\infty} f_n(u) \, du$. On applique donc le th. de convergence dominée :

— la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ sur $[1, +\infty[$

— d'après la célèbre inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$, on en déduit que pour tout $u \in [1, n]$, $0 \leqslant \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{u}{n}\right)\right) \leqslant \exp\left(n \times \dfrac{-u}{n}\right) = e^{-u}$

d'où la domination pour tout $u \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(u)| \leqslant \dfrac{e^{-u}}{u} \leqslant e^{-u}$

— la fonction $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

D'après le th. de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} \, du = \lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} f_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \, du.$

Q 13. De la même façon, on montre que

— pour tout $\in]0, 1]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} = \frac{1 - e^{-u}}{u}.$

— pour tout $u \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u}\right| = \frac{1}{n} . \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$

— la fonction $u \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, 1]$.

D'après le th. de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} \, du = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} \, du.$

Donc d'après **Q 9**, $\displaystyle J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} \, du - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \, du$ par opérations sur les suites convergentes. Mais comme (J_n) converge vers γ, on en déduit par unicité de la limite que

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} \, du - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \, du$$

Q 14. Sur chacune des deux intégrales précédentes, on effectue une intégration par parties :

— sous réserve de convergence, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} \, du = \left[(1 - e^{-u}) \ln u\right]_{u=0}^1 - \int_0^1 e^{-u} \ln u \, du$

or le crochet est convergent, car $(1 - e^{-u}) \ln u \underset{u \to 0}{\sim} u \ln u \xrightarrow[u \to 0]{} 0$ et en 1, $(1 - e^{-u}) \ln u = 0$, donc comme la première intégrale est convergente, l'intégration par parties est licite : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} \, du = -\int_0^1 e^{-u} \ln u \, du$

— sous réserve de convergence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \, du = \left[e^{-u} \ln u\right]_{u=1}^{+\infty} + \int_1^{+\infty} e^{-u} \ln u \, du$

or le crochet est convergent, car $e^{-u} \ln u \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$ et en 1, $e^{-u} \ln u = 0$, donc comme la première intégrale est convergente, l'intégration par parties est licite : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \, du = +\int_1^{+\infty} e^{-u} \ln u \, du$

d'après **Q 13**, on a donc

$$\gamma = -\int_0^1 e^{-u} \ln u \, du - \int_1^{+\infty} e^{-u} \ln u \, du = -\int_0^{+\infty} \ln(t) \, e^{-t} \, dt$$

Problème 2

Corrigé d'Edouard Lucas.

I.

I.A -

Q 1. On a $\chi_M = \det(XI_n - M) = \det\left((XI_n - M)^\top\right) = \det(XI_n - M^\top) = \chi_{M^\top}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \in \mathrm{sp}(M) \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{M^\top}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{sp}\left(M^\top\right)$$

Ainsi $\mathrm{sp}(M) = \mathrm{sp}\left(M^\top\right)$ et donc $\boxed{M \text{ et } M^\top \text{ ont même spectre}}$

Q 2.

$\underline{\Leftarrow:}$ On suppose que M est diagonalisable. ce qui nous fournit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$, donc $M^\top = \left(P^{-1}\right)^\top D^\top P^\top = \left(P^\top\right)^{-1} DP^\top$, d'où $M^\top$ est diagonalisable.

$\underline{\Rightarrow:}$ On suppose que $M^\top$ est diagonalisable. Pour montrer que M est diagonalisable, on utilise l'implication précédente en remarquant que $M = \left(M^\top\right)^\top$.

On a bien montré que $\boxed{M^\top \text{ est diagonalisable si et seulement si } M \text{ est diagonalisable}}$

I.B -

Q 3. On montre que $\chi_{C_Q} = Q$ par récurrence sur $\deg(Q) = n \geqslant 2$.

Initialisation : On suppose que $\deg(Q) = 2$ ainsi $Q = X^2 + a_1X + a_0$ et $C_Q = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

On a $\chi_{C_Q} = X^2 - \mathrm{tr}(C_Q)X + \det(C_Q) = X^2 + a_1X + a_0$ ce qui prouve l'initialisation

Hérédité : Soit l'entier $n \geqslant 2$. On suppose la propriété vraie pour tout polynôme unitaire de degré n.

On considère $Q(X) = X^{n+1} + a_nX^n + \cdots + a_0$ où les $a_i \in \mathbb{K}$. On a en développant par rapport à la première ligne :

$$\chi_{C_Q} = \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_n \end{vmatrix}_{[n+1]} = X \begin{vmatrix} -X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & -1 & X & a_{n-1} \\ \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_n \end{vmatrix}_{[n]} + (-1)^{n+2}a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Je note $R = X^n + a_nX^{-1} + \cdots + a_1$ et on a $\chi_{C_Q} = X.\chi_{C_R} + a_0(-1)^{2n+2}$

Par hypothèse, on a $\chi_{C_R} = R$ donc $\chi_{C_Q} = XR + a_0 = Q$

Conclusion : On a montré par récurrence que la propriété était vraie pour tout polynôme unitaire de degré $\geqslant 2$

En particulier $\boxed{Q \text{ est le polynôme caractéristique de } C_Q}$

Q 4. On a $(C_Q)^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. On a $\chi_{C_Q^\top} = \chi_{C_Q} = Q$ ainsi $Q(\lambda) = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$(C_Q)^\top X = \lambda X \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0x_1 & -\ldots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1}x_1 \\ (-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } (C_Q)^\top X = \lambda X \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![2, n]\!],\ x_i = \lambda^{i-1}x_1 \\ Q(\lambda)x_1 = 0 \end{cases}$$

Comme λ est racine de Q, alors $\boxed{\dim\left(E_\lambda\left(C_Q^\top\right)\right)=1,\ E_\lambda\left(C_Q^\top\right)=\operatorname{vect}(X_\lambda) \text{ où } X_\lambda=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix}}$

I.C -

Q 5.

$\Rightarrow$ **:** On suppose que f est cyclique.

Ceci nous fournit $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{B}=\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.

Il existe alors $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0)=\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)$. Je pose alors $Q=X^n+\sum_{i=0}^{n-1}(-\lambda_i)X^i\mathbb{K}[X]$, de sorte que Q est unitaire de degré n et $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)=C_Q$

$\Leftarrow$ **:** On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}=(e_0, e_1, \dots e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket,\ f(e_i)=e_{i+1}$, donc $(e_0, f(e_0), f^2(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E et donc f est cyclique.

$\boxed{\text{$f$ est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q où Q est un polynôme unitaire de degré n}}$

Q 6.

$\Leftarrow$ **:** On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples. Ainsi $|\operatorname{sp}(f)|=\deg(\chi_f)=\dim E$, donc f est diagonalisable d'après le cours.

$\Leftarrow$ **:** On suppose que f est diagonalisable. Comme f est cyclique, ceci nous fournit $\mathscr{B}$ une base de E et $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n tel que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)=C_Q$ d'après **Q 5**.

Ainsi C_Q est diagonalisable et il en est de même pour $C_Q^\top$ d'après **Q 2**.

Ainsi $\mathbb{K}^n=\bigoplus_{\lambda\in\operatorname{sp}(f)} E_\lambda\left(C_Q^\top\right)$ d'où $n=\sum_{\lambda\in\operatorname{sp}\left(C_Q^\top\right)} \dim\left(E_\lambda\left(C_Q^\top\right)\right)$

or on a $\forall\lambda \in \operatorname{sp}\left(C_Q^\top\right),\ \dim\left(E_\lambda\left(C_Q^\top\right)\right)=1$ d'après **Q 4** donc $\left|\operatorname{sp}\left(C_Q^\top\right)\right|=n$

or d'après **Q 1** : $\operatorname{sp}\left(C_Q^\top\right)=\operatorname{sp}\left(C_Q\right)=\operatorname{sp}(f)$

donc f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$

donc χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples

Ainsi $\boxed{\text{$f$ est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples}}$

Q 7. On suppose que f est cyclique.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i=0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrons $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,\ \lambda_i=0$.

Comme f est cyclique, ceci nous fournit $x \in E$ tel que $\mathscr{B}=(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E donc $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(x)=0_{\mathscr{L}(E)}(x)=0_E$,

ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,\ \lambda_i=0$ car $\mathscr{B}$ est libre. Alors $\boxed{(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}) \text{ est libre dans } \mathscr{L}(E)}$

Je note d le degré de π_f. D'après le cours on a $d=\dim(\mathbb{K}[f])$.

Or $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathbb{K}[f]$ donc $d \geqslant n$.

De plus d'après Cayley-Hamilton, on a χ_f est annulateur de f d'où $\pi_f \mid \chi_f$ or ce sont des polynômes non nuls. Ainsi on a $d=\deg(\pi_f) \leqslant \deg(\chi_f)=n$,

donc $n=d$ d'où $\boxed{\text{le polynôme minimal de f est de degré n}}$

I.D -

Q 8. On note $N_x=\{m \in \mathbb{N}^* \ /\ \left(f^i(x)\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1} \text{ libre}\}$.

On sait que $1 \in N_x$ car $x \neq 0_E$ et que $\forall m \geqslant n,\ m \notin N_x$ car $\dim E=n$. Ainsi N_x est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide majorée par $n-1$, donc N_x admet un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi la famille $\left(f^i(x)\right)_{0\leqslant i\leqslant p-1}$ est libre et la famille $\left(f^i(x)\right)_{0\leqslant i\leqslant p}$ est liée.

$\boxed{\text{On a bien l'existence de } p \in \mathbb{N}^* \text{ et de } (\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \text{ tels que la famille } (x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x)) \text{ est libre et } \alpha_0 x+\alpha_1 f(x)+\dots+\alpha_{p-1}f^{p-1}(x)+f^p(x)=0}$

Q 9. On a $f\left(\mathrm{Vect}(x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x))\right)=\mathrm{Vect}(f(x),f^2(x),f^3(x),\dots,f^p(x))$ car f linéaire,

or $f^p(x)=-\alpha_0 x-\alpha_1 f(x)+\dots-\alpha_{p-1}f^{p-1}(x)\in\mathrm{Vect}(x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x))$,

d'où $f\left(\mathrm{Vect}(x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x))\right)\subset\mathrm{Vect}(x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x))$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}(x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x)) \text{ est stable par } f}$

Q 10. Je note alors $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Vect}(x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x))$.

D'après ce qui précède $\mathscr{B}=\left(x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x)\right)$ est une base de $\mathrm{Vect}(x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x))$.

On remarque que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\tilde{f})=C_Q$ en notant $Q=\alpha_0+\alpha_1 X+\dots+\alpha_{p-1}X^{p-1}+X^p$

d'où $\chi_{\tilde{f}}=Q$ or $\chi_{\tilde{f}}|\chi_f$ car $\tilde{f}$ induit par f

On a montré que $\boxed{X^p+\alpha_{p-1}X^{p-1}+\dots+\alpha_0 \text{ divise le polynôme } \chi_f}$

Q 11. En reprenant les notations précédentes, on a $Q(f)(x)=0$ et il existe $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $PQ=\chi_f$.

Ainsi $\chi_f(f)=P(f)\circ Q(f)$, donc $\chi(f)(x)=P(f)\left[Q(f)(x)\right]=P(f)(0)=0$ car $P(f)$ linéaire

On a ainsi montré que : $\forall x\in E,\ \chi(f)(x)=0$. Or $\chi(f)\in\mathscr{L}(E)$, d'où $\boxed{\chi_f(f) \text{ est l'endomorphisme nul}}$

II.

II.A -

Q 12.

$\Rightarrow$ **:** On suppose f cyclique alors $\deg(\pi_f)=n$ d'après 7. De plus d'après le cours, $\chi_f=X^n$ car f nilpotente.

Or $\pi_f|\chi_f$ selon Cayley-Hamilton et π_f est unitaire par définition, donc $\pi_f=X^n$, ainsi $f^n=0$ et $\forall i\in[\![0,n-1]\!]$, $f^i\neq 0$, d'où $r=n$.

$\Leftarrow$ **:** On suppose que $r=n$ donc $f^n=0$ et $f^{n-1}\neq 0$. Ceci nous fournit $x\in E$ tel que $f^{n-1}(x)\neq 0$

Soit $\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i f^i(x)=0$. On montre que $\forall i\in[\![0,n-1]\!],\ \lambda_i=0$

On suppose, par l'absurde, que la propriété est fausse.

Je note alors j le minimum de $\{i\in[\![0,n-1]\!]\ /\ \lambda_i\neq 0\}$.

Ainsi $0=f^{n-1-j}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i f^i(x)\right)=f^{n-1-j}\left(\displaystyle\sum_{i=j}^{n-1}\lambda_i f^i(x)\right)=\lambda_j f^{n-1}(x)+\displaystyle\sum_{i=j}^{n-1}\lambda_i f^{n-1+i-j}(x)$.

Or $\forall i\geqslant p,\ f^i(x)=0$ donc $\lambda_j f^{n-1}(x)=0$ et $\lambda_j\neq 0$, d'où $f^{n-1}(x)=0$ ce qui est absurde.

Ainsi $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ est une famille libre composée de n vecteurs de E et $\dim E=n$, donc $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ est une base de E, donc f est cyclique.

On a montré que $\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement si } r=n}$

On remarque que la matrice compagnon associée est unique car les coefficients de cette matrices sont donnés par ceux du polynôme caractéristique.

On sait que si f est cyclique et nilpotente, alors $\chi_f=X^n$

$$\text{ainsi } \boxed{\text{la matrice compagnon de } f \text{ dans ce cas est } \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

II.B -

Q 13. C'est du cours. Dans cette question et les quatre qui suivent, on demande en fait de donner les démonstrations du cours. Donc je ne rédige pas, je vous renvoie à votre cours.

Q 14. Pareil.

Q 15. C'est encore du cours.

Q 16. Et encore du cours.

Q 17. C'est encore du cours.

Q 18. Soit $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ Je note $Q = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i$ de sorte que $Q(f)(x_0) = 0$

ainsi $\prod k = 1p(X - \lambda_k)^{m_k} | Q$ d'après la question précédente or $\deg(Q) \leqslant n - 1 < n = \deg \left(\prod k = 1p(X - \lambda_k)^{m_k} \right)$

donc Q est le polynôme nul et ainsi $\forall i \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \lambda_i = 0$

donc $\left(f^i(x_0)\right)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ est une famille libre de n vecteurs de E et $n = \dim E$

d'où $\left(f^i(x_0)\right)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ est une base de E ce qui justifie que $\boxed{f \text{ est cyclique}}$

Q 19. Voir réponse précédente.