Mpi - Programme de colles 12

Semaine du 6 au 11 janvier 2025

1 Suites et séries de fonctions

Toutes les fonctions sont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ pour commencer.

a) Suites de fonctions : convergence simple, convergence uniforme. La convergence uniforme est définie à l'aide de la norme sup ; définition d'une majoration uniforme. Lien entre les deux types de convergence.
b) Séries de fonctions : convergence simple, uniforme, normale. Liens entre ces types de convergence.
c) Préservation de la monotonie par limite simple. Préservation de la continuité par limite uniforme, contre-exemple avec de la convergence simple seulement.
d) Intervertion de limites et d'intégrales sur des segments.
e) Th. de la double limite.
f) Dérivation de la limite d'une suite ou série de fonctions de classe C^1. Généralisation aux fonctions de classe C^k.
g) Généralisation rapide aux suites et séries de fonctions de E dans F, deux e.v. de dimensions finies.
h) Approximation uniforme sur un segment des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escaliers, des fonctions continues par les polynômes (th. de Stone-Weierstrass).

2 Espaces préhilbertiens

a) Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : définition, exemples fondamentaux. Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens. Norme euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwarz. Orthogonalité de vecteurs, th. de Pythagore.
b) Familles orthogonales, familles orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale sans vecteur nul. Existence de bases orthonormées d'un espace euclidien, algorithme de Gram-Schmidt d'orthogonalisation/orthonormalisation d'une base. Intérêt des bases orthonormées pour la simplicité des calculs.
c) Sous-espaces orthogonaux. Des sous-espaces orthogonaux deux à deux sont en somme directe. Orthogonal d'un sous-espace, orthogonal d'un vecteur.
d) Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires. Projection orthogonale d'un vecteur sur un tel sous-espace (calcul effectif), projecteur orthogonal, propriétés remarquables des projecteurs orthogonaux.
e) Distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie, calcul effectif.