Problème 1 - Th. de Stone-Weierstrass

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On note $E_0 = C^0([a,b],\mathbb{R})$, $E_1 = C^1([a,b],\mathbb{R})$ et P l'ensemble des fonctions polynômes sur $[a,b]$.

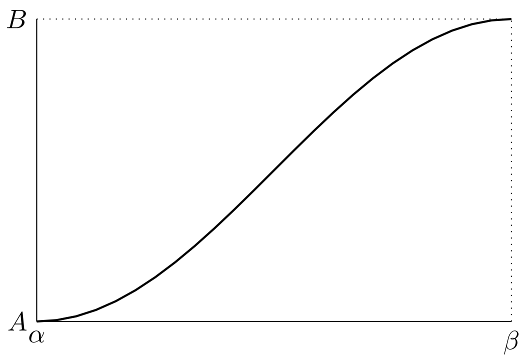
Pour $f \in E_0$, on pose $\|f\|_{a,b} = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$. On rappelle que $\|\ \|_{a,b}$ est une norme sur E_0, appelée la norme infinie.

I. Densité de E_1 dans E_0

Q 1. Soit α,β,γ trois réels tels que $\alpha < \beta < \gamma$, φ une fonction de classe C^1 sur le segment $[\alpha,\beta]$ et ψ de classe C^1 sur $[\beta,\gamma]$ telles que $\varphi(\beta) = \psi(\beta)$ et $\varphi'(\beta) = \psi'(\beta)$. Justifiez que la fonction définie par morceaux $t \mapsto \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [\alpha,\beta[\\ \psi(t) & \text{si } t \in [\beta,\gamma] \end{cases}$ est aussi de classe C^1 sur $[\alpha,\gamma]$.

Q 2. Soit α,β,A,B 4 réels tels que $\alpha < \beta$. Donnez un exemple concret d'une fonction g définie sur $[\alpha,\beta]$ telle que :
- g est de classe C^1 et monotone sur $[\alpha,\beta]$;
- $g(\alpha) = A$ et $g(\beta) = B$;
- $g'(\alpha) = 0$ et $g'(\beta) = 0$.

Autrement dit, la courbe de g doit ressembler à celle-ci :



Une telle fonction g est notée désormais $\Phi_{\alpha,\beta,A,B}$.

Q 3. Soit α,β 2 réels tels que $\alpha < \beta$. Soit f une fonction continue sur $[\alpha,\beta]$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $(s,t) \in [\alpha,\beta]^2$, $|f(s) - f(t)| \leqslant M$.

Montrez que $\left\|f - \Phi_{\alpha,\beta,f(\alpha),f(\beta)}\right\|_{\alpha,\beta} \leqslant 2M$.

Q 4. Soit $f \in E_0$ et $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que pour tout $(s,t) \in [a,b]^2$, si $|s-t| \leqslant \delta$, alors $|f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon$. Pourquoi est-ce possible ? Construisez une fonction ψ de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $\|f - \psi\|_{a,b} \leqslant 2\varepsilon$. Vous pourrez faire intervenir un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$ et poser $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ pour $i \in [\![0,n]\!]$.

Q 5. Montrez que E_1 est dense dans E_0 pour la norme uniforme.

II. Th. de Stone-Weierstrass dans E_1

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$ et $b = 1$ pour simplifer. Soit f est une fonction de E_1.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

Q 6. Dans les cas particuliers suivants, donnez une expression simplifiée de $B_n(x)$:
- f est la fonction constante égale à 1 ;
- f est la fonction $x \mapsto x$;
- f est la fonction $x \mapsto x^2$.

Vérifiez dans chacun de ces trois cas que la suite de fonctions (B_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Q 7. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$.

On revient au cas général.

Q 8. Justifiez l'existence de $K = \sup\limits_{[0,1]} |f'|$.

Q 9. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $|f(x) - B_n(x)| \leqslant \dfrac{K}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |k - nx| x^k (1-x)^{n-k}$.

Q 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $I_n = \{k \in [\![0,n]\!] \ / \ |k - nx| \geqslant \sqrt{n}\}$ et $J_n = \{k \in [\![0,n]\!] \ / \ |k - nx| < \sqrt{n}\}$.

a) Montrez que $\displaystyle\sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} |k - nx| x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{n}$.

b) Montrez que $\displaystyle\sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} |k - nx| x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{n} x(1-x) \leqslant \sqrt{n}$.

Q 11. Montrez que la suite de polynômes (B_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Q 12. Pourquoi, dans le cas général, peut-on affirmer que si a et b sont quelconques et $f \in E_1$, alors il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$?

III. Th. de Stone-Weierstrass dans E_0

Q 13. Montrez le théorème de Stone-Weierstrass : P est dense dans E_0 pour la norme infinie.

Problème 1

I.

Q 1. On note f la fonction définie par morceaux. Elle est évidemment de classe C^1 sur $[\alpha,\beta[$ et sur $[\beta,\gamma]$. Pour qu'elle le soit sur $[\alpha,\gamma]$, il faut et il suffit qu'elle soit continue en β et que sa dérivée f' le soit aussi.

Or $f(\beta)=\psi(\beta)$ et ψ est continue à droite en β, donc f l'est aussi. Et par continuité à gauche en β de la fonction φ, $\lim\limits_{x\to\beta_-} f(x)=\lim\limits_{x\to\beta_-}\varphi(x)=\varphi(\beta)=\psi(\beta)=f(\beta)$. Donc f est aussi continue à gauche en β. Au total, elle est continue en β.

On procède de même en β pour la fonction f', car $f'(\beta)=\psi'(\beta)=\varphi'(\beta)$.

Q 2. Par exemple, la fonction $x\mapsto \dfrac{A+B}{2}+\dfrac{A-B}{2}\cos\left(\pi\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$ convient.

Q 3. Pour alléger les notations, on pose $\phi=\Phi_{\alpha,\beta,f(\alpha),f(\beta)}$.

Soit $t\in[\alpha,\beta]$, alors par hypothèse, $|f(t)-f(\alpha)|\leqslant M$. En particulier, $|f(\beta)-f(\alpha)|\leqslant M$.

Donc $|f(t)-\phi(t)|\leqslant|f(t)-f(\alpha)|+|f(\alpha)-\phi(t)|=|f(t)-f(\alpha)|+|\phi(\alpha)-\phi(t)|\leqslant M+|\phi(\alpha)-\phi(t)|$.

Comme ϕ est monotone sur $[\alpha,\beta]$, alors $|\phi(\alpha)-\phi(t)|\leqslant|\phi(\beta)-\phi(\alpha)|=|f(\beta)-f(\alpha)|\leqslant M$.

Donc finalement, $|f(t)-\phi(t)|\leqslant 2M$.

Q 4. f est continue sur le segment $[a,b]$, donc d'après le th. de Heine, elle est uniformément continue sur $[a,b]$, ce qui justifie l'existence de δ.

On choisit un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n}\leqslant\alpha$ et on pose $a_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$ pour $i\in[\![0,n]\!]$. Remarque : c'est le point de départ de plusieurs démonstrations du cours de MP2I.

On définit alors la fonction ψ par morceaux sur $[a,b]$ en posant : pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$ et $t\in[a_i,a_{i+1}[$, on pose $\psi(t)=\Phi_{a_i,a_{i+1},f(a_i),f(a_{i+1})}$ et pour $t=b$, on pose $\psi(b)=f(b)$.

Alors par construction des fonctions Φ et d'après le question 1, ψ est de classe C^1 sur $[a,b]$.

Et en travaillant sur chaque intervalle $[a_i,a_{i+1}]$, d'après la question 3, pour tout $t\in[a_i,a_{i+1}]$, $|f(t)-\psi(t)|\leqslant 2\varepsilon$. Donc pour tout $t\in[a,b]$, $|f(t)-\psi(t)|\leqslant 2\varepsilon$, ce qui signifie que $\|f-\psi\|_{a,b}\leqslant 2\varepsilon$.

Q 5. On a donc montré que pour tout $f\in E_0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\psi\in E_1$ tel que $\|f-\psi\|_{a,b}\leqslant 2\varepsilon$, ce qui est exactement la définition de la densité de E_1 dans E_0.

II.

Q 6. Si f est la fonction constante égale à 1, alors B_n l'est aussi (formule du binôme). Donc la suite (B_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Si f est la fonction $x\mapsto x$, alors $B_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}$. Cette somme peut être commencée à $k=1$ car le terme d'indice 0 est nul. Or d'après la formule du capitaine, $k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$ pour $k\leqslant 1$.

Donc il vient $B_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j}=x$. Donc la suite (B_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Si f est la fonction $x\mapsto x^2$, alors $B_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k^2}{n^2}x^k(1-x)^{n-k}$. Cette somme peut être commencée à $k=1$ car le terme d'indice 0 est nul. De la même façon, on obtient $B_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j}$.

Donc $B_n(x)=\dfrac{x}{n}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}j\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j}+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j}\right)=\frac{x}{n}\left(\sum_{j=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{j-1}x^j(1-x)^{n-1-j}+1\right)$

Donc $B_n(x)=\dfrac{x}{n}\left((n-1)x+1\right)=\dfrac{n-1}{n}x^2+\dfrac{1}{n}x$.

En particulier, $|x^2 - B_n(x)| = \dfrac{|x^2 - x|}{n} \leqslant \dfrac{2}{n}$: on a une majoration uniforme de $|f - B_n|$ par une suite qui tend vers 0, donc la suite (B_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Q 7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^k(1-x)^{n-k} - 2nx\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k(1-x)^{n-k} + n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

Ces trois sommes sont à un facteur près les trois sommes calculées précédemment.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k} = n^2\left(\frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x\right) - 2n^2x \times x + n^2x^2 = nx(1-x)$.

Q 8. f est de classe C^1 donc f' est continue sur le segment $[0,1]$, donc d'après le th. des bornes atteintes, K existe.

Q 9. $\displaystyle f(x) - B_n(x) = f(x)\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^k(1-x)^{n-k}$,

donc par inégalité triangulaire, $\displaystyle |f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}$.

Or f est K-lipschitzienne (par inégalité des accroissement finis), donc $\displaystyle |f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}K\left|x - \frac{k}{n}\right|x^k(1-x)^{n-k}$.

Finalement, $\displaystyle |f(x) - B_n(x)| \leqslant \frac{K}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|k-nx|x^k(1-x)^{n-k}$.

Q 10.

a) Par définition de J_n, les termes de la somme $\displaystyle\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}|k-nx|x^k(1-x)^{n-k}$ sont tous plus petits que les termes de la somme $\displaystyle\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}\sqrt{n}x^k(1-x)^{n-k}$, donc $\displaystyle\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}|k-nx|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{n}\sum_{k\in J_n}x^k(1-x)^{n-k}$.

Comme on additionne des termes positifs, on a $\displaystyle\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$,

donc $\displaystyle\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}|k-nx|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{n}$.

b) Pour tout $k \in I_n$, $|k-nx| \geqslant \sqrt{n} \geqslant 1$ donc $\sqrt{n}|k-nx| \leqslant |k-nx|^2$,

donc $\displaystyle\sum_{k\in I_n}\binom{n}{k}|k-nx|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k\in I_n}\binom{n}{k}\frac{1}{\sqrt{n}}|k-nx|^2x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{k}|k-nx|^2x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{n}}nx(1-x) = \sqrt{n}x(1-x) \leqslant \sqrt{n}$ (car $x \in [0,1]$ donc $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$).

Q 11. D'après les deux questions précédentes, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $|f(x) - B_n(x)| \leqslant \dfrac{K}{n} \times 2\sqrt{n} = \dfrac{2K}{\sqrt{n}}$.

Autrement dit $\|f - B_n\|_{0,1} \leqslant \dfrac{2K}{\sqrt{n}}$: la suite de polynômes (B_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Q 12. Pour passer d'un segment $[a,b]$ quelconque au segment $[0,1]$, il suffit de composer par la transformation $x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a}$.

Soit $f \in E_1$, alors $g : t \mapsto f(a + t(b-a))$ est continue sur $[0,1]$ donc il existe une suite de polynômes B_n qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers g, donc la suite de polynômes $\left(x \mapsto B_n\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

III.

Q 13. Soit $f \in E_0$ et $\varepsilon > 0$.

D'après la partie 1, il existe $g \in E_1$ tel que $\|f - g\|_{a,b} \leqslant \varepsilon$.

Puis g étant dans E_1, d'après la partie 2, il existe un polynôme p tel que $\|g - p\|_{a,b} \leqslant \varepsilon$.

Donc $\|f - p\|_{a,b} \leqslant 2\varepsilon$.

Ceci prouve que P est dense dans E_0.