ESPACES EUCLIDIENS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

a) Montrez que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

b) Dans le cas où $n = 3$, donnez une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$

c) Calculez la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

***2)** Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire classique $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}.B)$

a) Montrez que si A est symétrique et B est antisymétrique, alors A et B sont orthogonales pour ce produit scalaire.

b) Déterminez $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

c) Dans le cas où $n = 2$, calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures.

d) Dans le cas général, calculez la distance de la matrice M remplie de 1 à F, s.e.v. des matrices de trace nulle.

****3)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)Q(k)}{2^k}$.

a) Montrez que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

b) Donnez une base orthonormée du sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Calculez la distance de X^3 à $\mathrm{vect}(1, X, X^2)$.

****4)** Même exercice avec $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

****5)**

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

b) Calculer T_0, T_1 puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. En déduire le degré et le coefficient dominant de T_n.

c) Montrez que l'application $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

d) Montrez que la famille (T_n) est orthogonale pour ce produit scalaire.

****6)** Soit E l'ensemble des suites réelles x telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2$ converge.

a) Vérifiez rapidement que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

b) Soit x, y deux éléments de E. Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n y_n$ est absolument convergente.

c) Montrez que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

d) On pose $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$. Montrez qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

***7)** Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ dans laquelle toutes les coordonnées sont exprimées. Soit u de coordonnées $(1, 3, 1)$, v de coordonnées $(5, 2, -1)$ et $w(1, 1, 1)$

a) Donnez un système d'équations et une base d'un supplémentaire de chacun des s.e.v. $\mathrm{vect}(u)$ et $\mathrm{vect}(u, v)$.

b) Déterminez la projection orthogonale de v sur la droite $\mathrm{vect}(u)$.

c) Déterminez la projection orthogonale de w sur le plan $\mathrm{vect}(u, v)$.

d) Déterminez la matrice du projecteur orthogonal sur le plan précédent.

***8)** Soit E un espace euclidien de dimension 4, on fixe une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ dans laquelle toutes les coordonnées sont exprimées. Soit $F = \{x \in E / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

a) Justifiez que F est un s.e.v. de E. Donnez une base orthonormée de F.

b) Soit v de coordonnées $(2, 3, 1, -1)$, déterminez sa projection orthogonale sur F.

c) Déterminez la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.

****9)** Soit $E = C^0([0,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$.

Déterminez $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi} (x - (a\cos x + b\sin x))^2\, dx$.

****10)**

a) Déterminez $\displaystyle\inf_{x\in\mathbb{R}} \left((2x-b_1)^2 + (3x-b_2)^2 + (4x-b_3)^2\right)$ où b_1, b_2, b_3 sont fixés dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminez $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - ak - b)^2$ (on admet $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$)

c) Déterminez $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 x^2\, \mathrm{d}x$.

d) Déterminez $\displaystyle\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} (t - a\sin t - b\cos t - c)^2\, \mathrm{d}t$.

****11)** Soit E un espace euclidien et $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in E^n$ des vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$$

Montrez que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

****12)** Soit E un espace euclidien, F, G deux s.e.v. de E.

Montrez que $(F^\perp)^\perp = F$, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

*****13)** On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $F = \{f \in E \;/\; f(0) = 0\}$. Déterminez $F^\perp$ puis $(F^\perp)^\perp$. Conclusion : a-t-on $E = F \oplus F^\perp$? $(F^\perp)^\perp = F$?

Indication : si $f \in F^\perp$, considérez la fonction $t \mapsto tf(t)$

****14)** Soit E un espace euclidien, p un projecteur . On sait d'après le cours que si p est un projecteur orthogonal, alors pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Montrez que la réciproque est vraie, en utilisant le vecteur $y + \lambda x$, où $x \in \operatorname{Im} p$, $y \in \operatorname{Ker} p$ et λ un réel.

****15)** Soit E un espace euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B}$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice (dans la base $\mathscr{B}$) est $A = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Donnez une base du noyau et de l'image de f. Vérifiez que ces deux sous-espaces de E sont supplémentaires orthogonaux.

b) Donnez une base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ de E dont les vecteurs sont choisis dans le noyau ou l'image de f (dans cet ordre).

c) Montrez que la matrice de f dans cette nouvelle base est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

d) Donnez une interprétation géométrique de l'application f.

***16)** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications linéaires dont les matrices sont :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \; \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$$

****17)** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe. Déterminez la matrice de la rotation d'axe orienté par u de coordonnées $(1, 1, -1)$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

****18)** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe. Soit u un vecteur unitaire, θ un réel, et f la rotation d'axe orienté par u, d'angle θ.

Montrez que pour tout $x \in E$, $f(x) = (1 - \cos\theta).(x|u).u + \cos\theta.x + \sin\theta.u \wedge x$.

****19)** Déterminez $\operatorname{card}(\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))$.

****20)** Soit E un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E. On note $v = \mathrm{Id}_E - u$.

a) Montrez que : $\operatorname{Ker}(v) = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$.

b) Soit p la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(v)$. Montrez que :

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x).$$

***21)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{\mathsf{T}} = A$.

a) Montrez que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = I_n$, alors $A^2 = I_n$. Que peut-on dire de mieux si k est impair ?

b) Montrez que si A est nilpotente, alors $A = 0$.

***22)** Soit $S = (s_{i,j})$ une matrice symétrique réelle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

Montrez que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

****23)** Soit $n \geqslant 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifiez que A est diagonalisable. Puis que A possède au plus trois valeurs propres distinctes, dont l'une est 0.

b) En notant λ et μ les deux autres valeurs propres (pas forcément distinctes), donnez deux équations reliant λ et μ, déduisez-en le spectre de A.

****24)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que AA^{T} et $A^{\mathsf{T}}A$ sont orthosemblables.

****25)** Déterminez toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A \times A^T \times A = I_n.$$

****26)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\;\mathrm{d}t.$$

a) Montrez que l'application $u \colon P \mapsto (1 - X^2)\,P'' - 2X\,P'$ est un endomorphisme auto-adjoint de E.

b) Montrez que les valeurs propres de u sont négatives.

****27)** Soit E un espace euclidien, $u_1, u_2, \dots, u_p \in E$ et f l'application de E dans E tel que :

$$f \colon\; x \longmapsto \sum_{k=1}^{p} \langle u_k, x \rangle\, u_k.$$

a) Quelle est l'application f lorsque $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthonormée ?

b) Dans le cas général, montrez que f est un endomorphisme auto-adjoint positif de E.

c) Déterminez $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

****28)** Rappel : une matrice symétrique $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est dit **positive** quand : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A\, X \geqslant 0$.

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez l'équivalence des propriétés suivantes :

(α) A est positive ;
(β) toutes les valeurs propres de A sont positives ;
(γ) il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M^T M$;
(δ) il existe $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = S^2$.

Modifiez les propositions précédentes pour caractériser les matrices A définies-positives.

*****29) [Racine carrée dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$]**

a) Montrez que $\begin{array}{rcl} r : \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2 \end{array}$ est une surjection.

b) Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et M un antécédent de A par cette application. Montrez qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$.

c) Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit M, N deux antécédents de A par cette application r. Montrez que $(M-N)(M+N) = 0$ et que $M + N$ est inversible.

Déduisez-en que l'application r est une injection.

*****30) [Décomposition polaire]**

Montrez que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.

****31)** Soit f et g deux endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien. Montrez que $f \circ g$ est auto-adjoint si et seulement si f et g commutent.

****32)**

a) Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et des matrices colonnes $U_1, \ldots, U_n$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad U_i^{\mathrm{T}} \times U_j = \delta_{i,j} \text{ et } S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, U_i \, U_i^{\mathrm{T}}.$$

b) Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. Montrer que u est combinaison linéaire de projections orthogonales sur des droites et que ces projections commutent entre elles.

****33)** Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4\,I_n = 0$ et $M^\top M = MM^\top$. On note $S = MM^\top$.

a) Trouvez un polynôme annulateur de S de degré 2.

b) Déduisez-en que $\dfrac{1}{2} M$ est orthogonale.

c) Dans le cas $n = 2$, déterminez toutes les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient les conditions de l'exercice.

****34)** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, u un vecteur non nul de E. On pose f l'endomorphisme de E défini par $f(x) = u \wedge (u \wedge x)$.

Montrez que f est diagonalisable et diagonalisez-le.

****35)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $S = \dfrac{1}{2}(A + A^\top)$, a, b les plus petite et plus grande valeurs propres de S.

Montrez que toute valeur propre réelle de A est comprise entre a et b.

****36)** Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme f de E est *anti-adjoint* quand

$$\forall u, v \in E, \quad \langle f(u), v \rangle = -\langle u, f(v) \rangle.$$

Dans tout l'exercice, on suppose que f est un endomorphisme anti-adjoint de E.

a) Montrez que : $\forall u \in E, \quad f(u) \perp u$.

b) Montrez que la seule valeur propre possible de f est 0. L'endomorphisme f peut-il être diagonalisable ?

c) Montrez que $f \circ f$ est un endomorphisme auto-adjoint de E et que ses valeurs propres sont négatives ou nulles.

d) Soit x un vecteur propre de $f \circ f$ pour la valeur propre $-\lambda \neq 0$.

(i) Montrez que $P_x = \operatorname{vect}\big(x, f(x)\big)$ est un plan vectoriel stable par f.

(ii) Montrez qu'il existe une base orthonormée (a, b) de P_x où la matrice de l'endomorphisme induit f_{P_x} est de la forme

$$R_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix},$$

où μ est un réel strictement positif que l'on précisera.

e) Montrez qu'il existe une base orthonormée de E où la matrice de f est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme R_μ d'abord puis des blocs (0) de taille 1×1.

Oraux de concours

1) CCINP

a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^n \,\mathrm{d}t$ (distinguer les cas n pair et n impair ; on donne de plus $I_0 = 1$).

b) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c) Calculez la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

2) CCINP

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose pour $(f, g) \in E^2$: $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)t^2 \,\mathrm{d}t$.

a) Montrez que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

b) Calculez $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t) \,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $F = \{x \mapsto ax + b \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x \ln x$ pour tout $x \in \,]0, 1]$.
Déterminer le projeté orthogonal de u sur F.

d) Déterminer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (at + b - t\ln t)^2 t^2 \,\mathrm{d}t$.

3) CCINP

Soit $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$. On pose pour $(f, g) \in E^2$: $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.

On considère les sous-ensembles $V = \{f \in E \ / \ f'' = f\}$, $G = \{f \in E \ / \ f(0) = f(1) = 0\}$
et $H = \{f \in E \ / \ f(0) = \operatorname{ch} 1, f(1) = 1\}$.

a) Montrez que la famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de V.

b) Soient $f \in V$ et $g \in E$. Montrer que $\langle f, g\rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$. Calculez $\langle \operatorname{ch}, \operatorname{sh}\rangle$, $\|\operatorname{ch}\|^2$ et $\|\operatorname{sh}\|^2$.

c) Soient $f \in V$ et $g \in G$. Montrer que $\langle f, g\rangle = 0$.

d) Soit $f \in H$. Calculer $\langle f, \operatorname{ch}\rangle$ et $\langle f, \operatorname{sh}\rangle$. En déduire le projeté orthogonal de f sur V.

e) Calculer $\displaystyle\inf_{f\in H} \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.

4) CCINP

Soit E un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

a) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left\| \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 . \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.

b) En déduire que si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1$, alors la famille $(e_i + u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.

5) CCINP

Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On note D la droite engendrée par le vecteur $u = \displaystyle\sum_{k=1}^n k e_k$.

a) Donner la matrice dans la base $\mathscr{B}$ du projecteur orthogonal sur D, noté p.

b) Donner le polynôme caractéristique et le spectre de p.

c) Calculer la distance de $v = \displaystyle\sum_{k=1}^n e_k$ à D.

6) CCINP

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice définie-positive et $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice de rang m.

a) Montrer que $n \geqslant m$.

b) Montrer que $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\mathsf{T} & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

7) IMT

Soit E un espace euclidien, f un endomorphisme auto-adjoint défini-positif de E.

a) Montrer que $(x, y) \mapsto \langle f(x), y\rangle$ est un produit scalaire sur E.

b) Montrer qu'il exste un endomorphisme auto-adjoint défini-positif g tel que $g^2 = f$.

8) IMT

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} A$ et $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $A = 0$.

9) CCINP Soit A et B deux matrices de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \dfrac{1}{3}(2A+B) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $AB^\top + BA^\top$ en calculant $MM^\top$.

b) Montrer que $A = B$.

10) CCINP Soit $C \in \mathscr{M}_n n, 1(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^\top \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

a) Calculer $M^\top M$, en déduire que M est inversible.

b) Montrer que $M^{-1}M^\top$ est une matrice orthogonale.

11) CCINP Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, $M^3 = I_n$ et $MM^\top = M^\top M$.

a) Montrer que $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Dans le cas où $n = 3$, déterminer les matrices M vérifiant les conditions de l'énoncé.

12) CCMP

a) Montrez que $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Est-ce que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ?

c) Soit $\mathscr{N}$ un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices nilpotentes. Montrez que $\dim \mathscr{N} \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

d) Peut-on avoir $\dim \mathscr{N} = \dfrac{n(n-1)}{2}$?

13) CEN Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice normale quand $AA^\top = A^\top A$.

a) Déterminer les matrices normales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que toute matrice normale stabilise un sous-espace de dimension 1 ou 2.

c) Montrer si A est normale, alors il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top AP$ soit diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant soit un bloc (a), soit un bloc $\begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix}$.

14) CEN Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de leurs produits scalaires canoniques.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\top A$. En déduire que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top A$ (noté r dans la suite).

b) Montrer qu'il existe une famille orthonormée de $\mathbb{R}^p$ $(y_1, \dots, y_r)$ telle que la matrice Y de colonnes $y_1, \dots, y_r$ vérifie $Y^\top A^\top AY = D$, où D est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

c) Montrer qu'il existe U, V orthogonales et Δ diagonale telles que $A = U\Delta V$.

15) CCMP Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,i} > 0$ et $a_{i,j}^2 \leqslant a_{i,i}a_{j,j}$.

b) Montrer que $\max\limits_{i,j} |a_{i,j}| = \max\limits_{k} a_{k,k}$.

16) CCMP

a) Montrer que si A, B sont dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$.

b) Déterminer les matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \operatorname{tr}(MS) \geqslant 0$.

17) CCMP Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \geqslant 2$ tels que $A^k = A^\top$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $B = A^{k+1}$ est une matrice de projecteur orthogonal.

c) Montrer que A induit une isométrie sur $\operatorname{Im} A$.

d) En déduire A.

18) CCMP Soit $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que le spectre complexe de A est inclus dans $i\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe $S' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S'^2 = S$.

c) Montrer que $\det(S) \leqslant \det(S+A)$.