Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Généralités

1.1 Produit scalaire

Définition. On appelle produit scalaire sur E toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui est
- bilinéaire (linéaire par rapport à chacune de ses deux variables vectorielles) ;
- symétrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- définie-positive : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Remarque. Pour montrer que φ est un produit scalaire, on montre en général d'abord que φ est symétrique, puis qu'elle est linéaire à gauche, la linéarité à droite découlant alors de la symétrie.

Définition. Quand E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace préhilbertien. Quand de plus E est de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.

En général, on note $\langle x, y\rangle$ ou $(x|y)$ les produits scalaires.

1.2 Exemples fondamentaux

- Le produit scalaire de la géométrie vérifie toutes ces propriétés.
- Si $E = \mathbb{R}^n$, soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose $\varphi(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$: φ est appelé le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- Plus généralement, si E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n, alors à toute base $\mathscr{B}$ de E, on peut associer un produit scalaire :

  si x et y sont deux vecteurs de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$, on pose $\varphi(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

  L'expression matricielle du produit scalaire est alors $\varphi(x, y) = X^{\mathsf{T}}.Y$.
- Si a, b sont deux réels tels que $a < b$, $I = [a, b]$ et $E = \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R})$, alors pour f et g deux éléments de E, on pose $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_a^b fg$: φ est un produit scalaire sur E.
- Si I est un intervalle, on note $\mathrm{L}^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de carrés intégrables sur I.

  Si $E = \mathrm{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(I, \mathbb{R})$, alors pour f et g deux éléments de E, on pose $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_I f.g$: φ est un produit scalaire sur E.
- Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}.B)$ est un produit scalaire, c'est même le produit scalaire canonique.

Remarque. Ne pas confondre le produit scalaire $X^{\mathsf{T}}.Y$ sur les **matrices-colonnes** et le produit scalaire $\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}.B)$ sur les **matrices carrées**.

***Exercices* :**

1) Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Montrez que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.
2) Dans $E = \mathrm{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f.g.\omega$, où $\omega \in E$. Donnez des conditions suffisantes sur ω pour qu'on obtienne un produit scalaire sur E.
3) Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrez que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire. Pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, calculez $\langle X^k, X^\ell\rangle$.

1.3 Norme euclidienne

Définition. Soit E un espace préhilbertien, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire sur E.
On appelle norme euclidienne associé au produit scalaire l'application de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Remarque. Cette définition a bien un sens, car d'après les propriétés d'un produit scalaire, pour tout $x \in E$, $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ donc $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ existe.

On vérifie alors les résultats suivants, inspirés par la géométrie habituelle dans un triangle ou un parallélogramme.

Proposition 1.
- ▷ *pour tout* $(x, y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ *(égalité d'Al-Kashi)*
- ▷ *pour tout* $(x, y) \in E^2$, $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$ *(égalité d'Al-Kashi)*
- ▷ *pour tout* $(x, y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *(identité du parallélogramme)*
- ▷ *pour tout* $(x, y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$ *(identité de polarisation)*

Et encore

Proposition 2. *Avec les mêmes notations,*
- ▷ *pour tout* $(x, y) \in E^2$, $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|.\|y\|$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*
- ▷ *pour tout* $(x, y) \in E^2$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)*
- ▷ *pour tout* $x \in E$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$
- ▷ *pour tout* $x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Remarque. Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si x et y sont colinéaires.
Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

On dit qu'un vecteur de E est unitaire (ou normalisé) si sa norme vaut 1. À tout vecteur x non nul, on associe deux vecteurs unitaires : $\dfrac{x}{\|x\|}$ et $-\dfrac{x}{\|x\|}$.

Exercices **:**

4) soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, donnez une inégalité liant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2$

5) soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ une fonction à valeurs strictement positives. Montrez que :

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

1.4 Vecteurs orthogonaux

Définition. Soit E un espace préhilbertien, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire.
On dit que deux vecteurs x, y sont orthogonaux (sous-entendu : pour ce produit scalaire) quand $\langle x, y\rangle = 0$.
On peut alors noter $x \perp y$ pour signifier que x et y sont orthogonaux.
Plus généralement, si $x_1, \ldots, x_n$ sont n vecteurs de E, on dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale quand pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.

On retrouve alors le célèbre théorème de Pythagore.

Proposition 3. *Avec les mêmes notations,* $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

***Exercices* :**

6) Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension au moins 2 et u, v deux vecteurs non colinéaires. Montrez qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel u et v sont orthogonaux.

2 Bases orthonormées

2.1 Familles orthonormées

Définition. Soit E un espace préhilbertien. Une famille de vecteurs est dite orthonormée (ou orthonormale) quand elle est orthogonale et ces vecteurs sont unitaires.

Proposition 4. *Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.*

Une famille orthonormée génératrice de E est donc une base orthonormée de E.

***Exercices* :**

7) Généralisez l'exercice précédent.

2.2 Existence de bases orthonormées

Théorème 1. *Soit E un espace euclidien. Il existe dans E des bases orthonormées.*

De plus, pour toute base $(v_1, \dots, v_n)$ de E, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{vect}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_k)$.

La démonstration repose sur l'algorithme d'orthogonalisation/orthonormalisation de Schmidt.

On en déduit le théorème de la base orthonormée incomplète.

Théorème 2. *Soit E un espace euclidien. Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E.*

***Exercices* :**

8) Dans $E = \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 fg$, orthogonalisez la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.

9) Dans $\mathbb{R}^5$, muni du produit scalaire canonique, on pose $u = (1, 2, 3, 4, 5)$. Complétez la famille (u) en une base orthonormée de $\mathbb{R}^5$.

2.3 Calculs en base orthonormée

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Soit x, y deux vecteurs de E, de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top . Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^\top . X}$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = \langle x, e_i \rangle$$

3 Sous-espaces orthogonaux

3.1 Orthogonalité de deux s.e.v.

Définition. Soit E un espace préhilbertien. Soit F, G deux s.e.v. de E.

Soit u un vecteur de E. On dit que u est orthogonal à F (ou normal à F) quand u est orthogonal à tous les vecteurs de F.

On dit que F et G sont orthogonaux quand tout vecteur de F et tout vecteur de G sont orthogonaux, autrement dit quand pour tout $(x, y) \in F \times G$, $\langle x, y\rangle = 0$.

Proposition 5. *Si F est de dimension finie et a pour famille génératrice $(v_1, \dots, v_k)$, alors u est orthogonal à F si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\langle u, v_i\rangle = 0$.*

Exercices :

10) Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, on pose $F = \{P(X^2) \;/\; P \in \mathbb{R}[X]\}$ et $G = \{XP(X^2) \;/\; P \in \mathbb{R}[X]\}$.
Justifiez que F et G sont deux s.e.v. orthogonaux.

11) Dans $\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, espace des fonctions continues 2π-périodiques muni du produit scalaire $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, montrez que les deux s.e.v. engendrés par les familles $(x \mapsto \sin(kx))_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(x \mapsto \cos(kx))_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont orthogonaux.

Proposition 6. *Si F et G sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe : $F \cap G = \{0\}$.*
Si $F_1, \dots, F_k$ sont k s.e.v. deux à deux orthogonaux, alors ils sont en somme directe.

Dans ce cas, on note la somme directe avec le symbole $\overset{\perp}{\underset{1\leqslant i\leqslant k}{\bigoplus}} F_i$: on dit qu'il s'agit d'une somme directe orthogonale.

3.2 Orthogonal d'un s.e.v.

Définition. Si F est un s.e.v. de E, espace préhilbertien, on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs normaux à F :

$$F^\perp = \{v \in E \;/\; \forall x \in F \quad \langle v, x\rangle = 0\}$$

Avec cette notation, on a clairement l'équivalence :

F et G sont deux s.e.v. orthogonaux si et seulement si $F \subset G^\perp$, ou ce qui revient au même $G \subset F^\perp$

Théorème 3. *Soit E un espace préhilbertien et F un s.e.v. de E.*
Alors $F^\perp$ est un s.e.v. de E, orthogonal à F et donc en somme directe avec F.

Proposition 7. *Soit E un espace préhilbertien et F un s.e.v. de E.*
Alors $F \subset F^{\perp\perp}$.

Remarque. En général, $F^\perp$ n'est pas supplémentaire à F et F n'est pas égal à $F^{\perp\perp}$.

Remarque. Dans le cas où F est une droite vectorielle dirigée par un vecteur u, on note plutôt $G = u^\perp$ l'orthogonal de F : dans ce cas, $u^\perp$ est un hyperplan et on dit alors que u est un vecteur normal à G.

4 Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension finie

4.1 Projection orthogonale

Proposition 8. *Soit E un espace préhilbertien, F un s.e.v. de E de dimension finie.*
Alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F, appelé **le** *supplémentaire orthogonal de F.*

Définition. Avec ces notations, le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé le projecteur orthogonal sur F.
La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$.

Si on connaît une base orthonormée de F, $(e_1, \ldots, e_p)$, alors il est facile de calculer la projection orthogonale de x sur F :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Les projecteurs orthogonaux vérifient quelques propriétés remarquables.

Proposition 9. *Soit E un espace préhilbertien, F un s.e.v. de E de dimension finie..*
Si p est le projecteur orthogonal sur F, alors
- *pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$*
- *pour tout $x \in E$, $\langle p(x), x \rangle = \|p(x)\|^2$*
- *pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$.*

4.2 Distance à un s.e.v.

On rappelle la définition de distance d'un point à une partie d'un e.v.n. :
soit $a \in E$ et A une partie non vide de E, on pose $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \ / \ a \in A\} = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.

En général, cette distance n'est pas atteinte ($\inf \neq \min$).

Proposition 10. *Soit E un espace préhilbertien, F un s.e.v. de E de dimension finie et x un vecteur de E.*
Soit y la projection orthogonale de x sur F. Alors pour tout $z \in F$, $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$, avec égalité si et seulement si $z = y$.

Autrement dit, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui minimise la distance entre x et un point de F.
$\|x - y\|$ est alors la distance de x à F, c'est le minimum des distances entre x et un élément de F :

$$d(x, F) = \min_{z \in F} \|x - z\| = \|x - p_F(x)\|$$

Remarque. Tout ce qui précède est bien sûr valable si E est de dimension finie.
Dans ce cas, pour tout s.e.v. de F, $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E.
Par conséquent, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.