On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.

Q 1. Justifiez que f est définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est impaire et croissante sur $\mathbb{R}$.

Q 2. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 3. Montrez que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donnez une expression de $f'(x)$ sous forme d'une somme de série.

Q 4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Justifiez que f a une limite en $+\infty$. Montrez que pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$. Déduisez-en la valeur de la limite.

Q 5. Déterminez la limite en $+\infty$ de f'.

Q 6. Montrez que la courbe de f possède une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$. Donnez l'allure de la courbe de f.

Exercice hebdomadaire 9 - Corrigé

Q 1. Dans la suite, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\arctan'(x)| = \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\arctan t| \leqslant |t|$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|}{n^2}$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

Comme la fonction arctan est impaire, il vient facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\arctan\left(\frac{-x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n}\arctan\left(\frac{x}{n}\right) = -f(x)$, donc f est impaire.

Et les fonctions f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$, donc la somme f est elle-même croissante sur $\mathbb{R}$ (par convergence simple des sommes partielles, qui sont des fonctions croissantes).

Q 2. Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a, +a]$, on a l'inégalité $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|}{n^2} \leqslant \dfrac{a}{n^2}$. Or la série $\sum \dfrac{a}{n^2}$ converge, donc la série $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-a, +a]$.

Comme les fonctions f_n sont toutes continue sur $[-a, +a]$, d'après le th. de continuité des séries, on en déduit que f est continue sur $[-a, +a]$. Puis par réunion d'intervalles, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$, donc $0 \leqslant f_n'(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La série de fonctions $\sum f_n'$ converge donc normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$, donc d'après le th. de dérivabilité des séries, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

Q 4. Pour $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, $f(x)$ est la somme d'une série à termes positifs, donc elle est plus grande que toutes les sommes partielles : $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ (inégalité (1)).

Comme on sait que f est croissante sur $\mathbb{R}$, d'après le th. de la limite monotone, f a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Par passage à la limite dans l'inégalité (1) quand $x \to +\infty$, on en déduit que $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\pi}{2n}$ (inégalité (2)).

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\pi}{2n}$ est divergente et à termes positifs, donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Donc maintenant par passage à la limite dans (2) quand $N \to +\infty$, on obtient $\ell \geqslant +\infty$, donc $\ell = +\infty$.

Q 5. On a montré en question 3 que la série définissant f' converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc par th. de la double limite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

Q 6. Deux solutions : montrer à partir de $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x_to+\infty]{} 0$ (exercice classique, du type Cesaro) ; ou alors remarquer que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{f_n(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ d'après la question 1, donc que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(x \mapsto \frac{f_n(x)}{x}\right)$ converge normalement sur $]0, +\infty[$, donc par th. de la double limite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

Donc la courbe de f possède une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$.